



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΜΣ: ΓΕΩΧΩΡΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία:

**Διερεύνηση της συνεισφοράς των νέων δορυφορικών  
αποστολών παρακολούθησης του γήινου πεδίου  
βαρύτητας στην υψομετρία.**

Τουρτόγλου Κωνσταντίνος

A.M :1712

Τριμελής επιτροπή:

Βασίλειος Ανδριτσάνος

Βασίλειος Παγούνης

Μιχαήλ Γιαννίου

ΑΘΗΝΑ 2021

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία:  
Διερεύνηση της συνεισφοράς των νέων δορυφορικών  
αποστολών παρακολούθησης του γήινου πεδίου  
βαρύτητας στην υψομετρία.

Τουρτόγλου Κωνσταντίνος

A.M :1712

Εισηγητής:

Βασίλειος Ανδριτσάνος

Εξεταστική Επιτροπή:

Βασίλειος Ανδριτσάνος

Βασίλειος Παγούνης

Μιχαήλ Γιαννίου

Ημερομηνία εξέτασης: 12/7/2021

Η διπλωματική Εργασία έγινε αποδεκτή και βαθμολογήθηκε από την εξής τριμελής επιτροπή:

Βασίλειος Ανδριτσάνος Αναπληρωτής Καθηγητής	Βασίλειος Παγούνης Καθηγητής	Μιχαήλ Γιαννίου Αναπληρωτής Καθηγητής

## ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο κάτωθι υπογεγραμμένος Κωνσταντίνος Τουρτόγλου του Σάββα, με αριθμό μητρώου 1712 φοιτητής του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Γεωχωρικές Τεχνολογίες του Τμήματος Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής της Σχολής Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής, δηλώνω ότι:

<<Είμαι συγγραφέας αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια στην οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται ότι σύνολο τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία έχει συγγραφεί από μένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος>>.

Ο Δηλων



Κωνσταντίνος Τουρτόγλου

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Την τελευταία δεκαετία, έντονο υπήρξε το ενδιαφέρον την παγκόσμιας γεωδαιτικής κοινότητας σχετικά με τη μελέτη και διαχρονική παρακολούθηση του γήινου πεδίου βαρύτητας και την επίδρασή του στη μελέτη του φυσικού συστήματος της Γης. Για πρώτη φορά το γήινο πεδίο παρατηρείται με τόσο υψηλή ακρίβεια και διακριτική ικανότητα, ιδιαίτερα στις χαμηλές και μέσες συχνότητες του φάσματός του. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι σύγχρονες εξελίξεις στην υψομετρία και η συνεισφορά των νέων δορυφορικών αποστολών του γήινου πεδίου βαρύτητας στις υψομετρικές μεθόδους προσδιορισμού. Ο έλεγχος της ακρίβειας και της αξιοπιστίας των νέων δορυφορικών δεδομένων βασίζεται στη χρήση κατάλληλων παραμετρικών μοντέλων και στη στατιστική τους αξιολόγηση. Ιδιαίτερη αναφορά πραγματοποιείται στη βελτίωση των παγκόσμιων μοντέλων γεωειδούς, τόσο στις χαμηλές, όσο και στις μέσες συχνότητες του φάσματός του.

## ABSTRACT

In the last decade, there has been intense interest from the global geodetic community in the study and monitoring of the Earth's gravitational field and its impact on the study of the Earth's physical system. For the first time the earth gravity field is observed with such high accuracy and resolution, especially at the low and medium frequencies of its spectrum. This study presents the current developments in height determination and the contribution of the new satellite missions of the earth's gravitational field to the altitude determination methods. The control of the accuracy and reliability of the new satellite data is based on the use of appropriate parametric models and their statistical evaluation. Particular reference is made to the improvement of global geoid models, both at low and medium frequencies of its spectrum.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέποντα καθηγήτριά Β.Ανδριτσάνο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην επιλογή του θέματος, όπου με την καθοδήγηση του και τις συμβουλές του συνέβαλε στη διεξαγωγή της εργασίας μου.

Επίσης τους γονείς μου, οι οποίοι στήριξαν με διάφορους τρόπους.

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1 : Στατιστικά των υψομέτρων $H_{MT}$ και $H_{FT}$ .....	40
Πίνακας 4.2 : Στατιστικά των NGPS,NEGM2008 και ΔN.....	43
Πίνακας 4.3 : Στατιστικά του εσωτερικού ελέγχου των παραμετρικών μοντέλων (m).....	45
Πίνακας 4.4 : Στατιστικά του εξωτερικού ελέγχου των παραμετρικών μοντέλων (m).....	46
Πίνακας 4.5 : Τιμές του $R^2$ των μοντέλων.....	47
Πίνακας 4.6 : Τιμές του $R_a^2$ των μοντέλων.....	48
Πίνακας 4.7 : Υπολογιζόμενες τιμές του $\tilde{F}$ .....	51
Πίνακας 4.8 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα 4 μοντέλου.....	52
Πίνακας 4.9 Στατιστικά μοντέλων EGM2008 και GOCE.....	68
Πίνακας 4.10 Ορθομετρικά υψόμετρα.....	70
Πίνακας 4.11 Στατιστικά ορθομετρικών υψομέτρων.....	70

## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1: Ορθομετρικό υψόμετρο.....	14
Σχήμα 1.2: Κανονικό υψόμετρο.....	17
Σχήμα 2.1: Τυπική γεωμετρική ερμηνεία των σφαιρικών αρμονικών.....	20
Σχήμα 3.1: Οι δορυφόροι παρακολούθησης του πεδίου βαρύτητας.....	27
Σχήμα 3.2: Η τεχνική παρατήρησης SST-I.....	28
Σχήμα 3.3: Η τεχνική παρατήρησης SST-II.....	28
Σχήμα 3.4: Η τεχνική παρατήρησης SSG.....	29
Σχήμα 4.1: Περιοχή μελέτης.....	38
Σχήμα 4.2: Διαδικασία υπολογισμού γεωειδούς EGM2008.....	42
Σχήμα 4.3: Διαγράμματα εύρους EGM2008-DIR.....	55
Σχήμα 4.4: Διαγράμματα εύρους EGM2008-TIM.....	57
Σχήμα 4.5: Διαγράμματα εύρους EGM2008-SPW.....	58
Σχήμα 4.6: Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-DIR.....	59
Σχήμα 4.7: Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-TIM.....	61
Σχήμα 4.8: Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-SPW.....	62
Σχήμα 4.9: Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-DIR.....	64
Σχήμα 4.10: Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-TIM.....	66
Σχήμα 4.11: Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-SPW.....	67



## Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	9
1. Κεφάλαιο. Υψομετρικά συστήματα.....	11
1.1. Δυναμικά υψόμετρα.....	11
1.2. Ορθομετρικά υψόμετρα.....	12
1.3. Κανονικά υψόμετρα.....	15
2. Κεφάλαιο. Πεδίο βαρύτητας και Γεωδυναμικά μοντέλα.....	18
2.1. Πεδίο βαρύτητας.....	18
2.2. Γεωδυναμικά μοντέλα.....	22
2.2.1. EGM96.....	24
2.2.2. EGM2008.....	25
3. Κεφάλαιο. Συμβολή των δορυφόρων στη μελέτη του πεδίου βαρύτητας.....	27
3.1. Γεωδυναμικά μοντέλα της δορυφορικής αποστολής GOCE.....	34
3.1.1. Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE ευθείας μεθόδου υπολογισμού DIR.....	34
3.1.2. Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE μεθόδου χωρικής ανάλυσης SPW.....	34
3.1.3. Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE μεθόδου φασματικής ανάλυσης TIM.....	35
4. Κεφάλαιο. Εφαρμογή ενσωμάτωσης δορυφορικών δεδομένων.....	36
5. Συμπεράσματα.....	71
Βιβλιογραφία.....	73

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της εργασίας είναι η διερεύνηση της συνεισφοράς των νέων γεωδυναμικών μοντέλων που προέκυψαν από τις διαφορετικές επεξεργασίες των δεδομένων της δορυφορικής αποστολής GOCE (Gravity and Ocean Circulation Experiment) στην εύρεση ορθομετρικών υψομέτρων ακριβείας με τη χρήση μεθόδων δορυφορικού εντοπισμού. Η ανάπτυξη των νέων δορυφορικών αποστολών μελέτης του πεδίου βαρύτητας σε συνδυασμό με τις βελτιωμένες μεθόδους παρατήρησης και επεξεργασίας των δορυφορικών δεδομένων έχει οδηγήσει στη διερεύνηση της δυνατότητας της χρήσης των μοντέλων αυτών στην υψομετρία. Οι υψηλές ακρίβειες στις χαμηλές συχνότητες του σήματος του πεδίου βαρύτητας οδηγούν στο στόχο της εκτίμησης «γεωειδούς ενός εκατοστού (1-cm geoid)», ακρίβεια απαραίτητη στην δορυφορική υψομετρία και στην ενοποίηση κατακόρυφων γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς. Στην παρούσα εργασία θα διερευνηθεί ο βαθμός ενσωμάτωσης διαφορετικών δορυφορικών μοντέλων στο βασικό μοντέλο αναφοράς EGM2008 και η δυνατότητα αντικατάστασης των χαμηλών συχνοτήτων αυτού με την πληροφορία της δορυφορικής αποστολής GOCE. Η διερεύνηση στηρίζεται στην προοδευτική ενσωμάτωση της πληροφορίας, ανά βαθμό ανάπτυξης, σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται από τους Andritsanos et al. (2014), Vergos et al. (2015), ενώ η αξιολόγηση των παραμετρικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν χρησιμοποίησε τις μεθόδους αξιολόγησης που αναλύονται από την Fotopoulos (2003).

Μια σχετική με την επίδραση των δεδομένων του GOCE στα υψομετρικά συστήματα και ιδιαίτερως στην περιοχή του Καναδά, παρουσιάστηκε από τους Hayden et al. (2012). Σε αυτήν την έρευνα πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις GPS και υπολογίστηκαν οι αποχές του γεωειδούς των γεωδυναμικών μοντέλων EGM2008, GRACE και GOCE. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα μοντέλα GOCE έχουν καλύτερο βαθμό προσαρμογής.

Η έρευνα βασίστηκε σε διαθέσιμα δεδομένα υψομετρίας από τις εργασίες του ερευνητικού προγράμματος ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ – Ενίσχυση Ερευνητικών Μονάδων στα Πανεπιστήμια και ΤΕΙ (Αρχιμήδης, 2013), τα οποία μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια του προγράμματος (2011 – 2012). Πρόκειται για 102 χωροσταθμικά σημεία αναφοράς (τριγωνομετρικά σημεία του κρατικού δικτύου, χωροσταθμικές αφετηρίες, ιδρυθέντα υψομετρικά σημεία), στα οποία είναι διαθέσιμα α) οι γεωδαιτικές τους συντεταγμένες, β) τα γεωμετρικά υψόμετρα ( $h$ ) και γ) τα ορθομετρικά υψόμετρα ( $H$ ) στο ελληνικό κατακόρυφο σύστημα αναφοράς. Οι απαιτούμενες αποχές του γεωειδούς ( $N$ ) των γεωδυναμικών μοντέλων EGM2008 και των δεδομένων του GOCE υπολογίστηκαν με το διαθέσιμο εργαλείο που παρέχεται από το Διεθνές Κέντρο για τα παγκόσμια μοντέλα Γης από την ιστοσελίδα <http://icgem.gfz-postdam.de/home>.

Αξιοποιώντας τα δεδομένα προέκυψε η ακόλουθη δομή της εργασίας αυτής:

Στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα υψομετρικά συστήματα, όπου αναφέρονται τα είδη των υψομέτρων και γίνεται η ανάλυση τους.

Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο πεδίο βαρύτητας και στα γεωδυναμικά μοντέλα, όπου γίνεται ανάλυση των εννοιών που αφορούν στο πεδίο βαρύτητας και τη σύνδεσή του με την υψομετρία. Αναλύονται επίσης οι πληροφορίες σχετικά με τον υπολογισμό των συντελεστών των γεωδυναμικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται.

Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη συμβολή των δορυφόρων στη μελέτη του πεδίου βαρύτητας, όπου αναφέρονται οι τεχνικές παρακολούθησης του πεδίου βαρύτητας της Γης και οι δορυφορικές αποστολές CHAMP, GRACE-FO και GOCE.

Στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη εφαρμογή ενσωμάτωσης δορυφορικών δεδομένων, όπου αναφέρεται όλη η υπολογιστική διαδικασία που πραγματοποιήθηκε, ενώ αναλύονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των γεωδυναμικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν στην περιοχή μελέτης

Τέλος, στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της μελέτης και προτείνονται περιοχές περαιτέρω έρευνας πάνω στο συνδυασμό δορυφορικών (γεωμετρικών) και φυσικών πληροφοριών στον υψομετρικό έλεγχο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Τα υψομετρικά συστήματα διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες, αναλόγως της ενσωμάτωσης της τιμής βαρύτητας στον υπολογισμό τους: α) Δυναμικά υψόμετρα β) Ορθομετρικά υψόμετρα και γ) Κανονικά υψόμετρα, όπου επεξηγούνται λεπτομερώς παρακάτω.

### 1.1 Δυναμικά υψόμετρα

Το δυναμικό υψόμετρο προκύπτει από τη διαίρεση του γεωδυναμικού αριθμού (μονάδες ενέργειας, όχι μήκος) με μια σταθερή τιμή βαρύτητας (για μια συγκεκριμένη περιοχή, ή ακόμη και παγκοσμίως) και είναι πάντα θετικό.

$$H^{dyn} = \frac{c}{\gamma_0} \quad (1.1)$$

Η ακρίβεια εξαρτάται πόσο καλά το  $\gamma_0$  εκφράζει τη βαρύτητα στη υψομετρική περιοχή μελέτης.

Ο γεωδυναμικός αριθμός C είναι ανεξάρτητος από τη συγκεκριμένη γραμμή υψομετρίας που χρησιμοποιείται για τη συσχέτιση του σημείου με τη στάθμη της θάλασσας. Ο γεωδυναμικός αριθμός C μετράτε σε γεωδυναμικές μονάδες (g.p.u.), όπου

$$1 \text{ g.p.u.} = 1 \text{ kGal}\cdot\text{m} = 1000 \text{ Gal}\cdot\text{m}.$$

Ωστόσο το δυναμικό σύστημα υψομέτρου δεν είναι πάντα προτιμότερο ως πρακτικό σύστημα υψομέτρου επειδή δεν έχει γεωμετρικό νόημα, είναι καθαρά φυσική ποσότητα.

Επίσης το δυναμικό υψόμετρο αλλάζει με τις διακυμάνσεις στη βαρύτητα και η μονάδα μέτρησης μήκους δεν είναι γενικά η ίδια.

(Featherstone, 2006, Hoffman – Wellenhof and Moritz, 2006)

## 1.2 Ορθομετρικά υψόμετρα

Το ορθομετρικό υψόμετρο(βλ. Σχήμα 1.1)είναι η απόσταση καμπύλης γραμμής που υπολογίζεται κατά μήκος της κατακόρυφης (γραμμή πεδίου του πεδίου βαρύτητας της Γης) από το γεωειδές στο σημείο ενδιαφέροντος. Ωστόσο, αυτή η καμπύλη εξαρτάται από τη βαρύτητα με δύο τρόπους. Πρώτον, η καμπύλη ξεκινά από το γεωειδές. Δεύτερον, οι κατακόρυφες παραμένουν παντού κάθετες σε ισοδυναμικές επιφάνειες μέσω του οποίου περνούν, έτσι το σχήμα της καμπύλης καθορίζεται από τον προσανατολισμό των ισοδυναμικών επιφανειών. Επομένως, τα ορθομετρικά υψόμετρα σχετίζονται στενά με τη βαρύτητα επιπλέον να είναι μια γεωμετρική ποσότητα.

Η επιφάνεια αναφοράς γεωειδούς είναι επίσης μοναδική, είναι η μοναδική ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της Γης.

Το ορθομετρικό σύστημα υψομέτρου είναι δύσκολο να υλοποιηθεί τέλεια στην πράξη, γιατί χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε την ακριβή διαδρομή της κατακόρυφης στην τοπογραφία και τη επιτάχυνση βαρύτητας της Γης σε όλα τα σημεία κατά μήκος της κατακόρυφης. Αυτό απαιτεί γνώση των διακυμάνσεις της βαρύτητας ή κατανομή πυκνότητας μάζας μέσα στην τοπογραφία.

Οι περισσότερες χώρες που χρησιμοποιούν σύστημα ορθομετρικού υψομέτρου χρησιμοποιούν το Helmert's(1890) προσέγγιση, όπου γίνονται ορισμένες απλοποιητικές υποθέσεις σχετικά με το πεδίο βαρύτητας μέσα στην τοπογραφία.

Για να προσδιοριστεί ένα ορθομετρικό υψόμετρο Helmert, μια επιφάνεια η παρατήρηση της βαρύτητας στο σημείο ενδιαφέροντος μετατρέπεται σε ακέραιο-μέσο όρο τιμή κατά μήκος της κατακόρυφης χρησιμοποιώντας την απλοποιημένη μείωση Poincaré-Prey .Αυτή η μείωση προσεγγίζει με ακρίβεια την κλίση κάθετης βαρύτητας με τη βαρύτητα ελεύθερου αέρα και μοντελοποιεί την τοπογραφία από ένα σφαιρικό φλοιό με μια σταθερά πυκνότητα μάζας  $2670 \text{ kg / m}^3$ . Η μέση τιμή βαρύτητας Helmert κατά μήκος της κατακόρυφης χρησιμοποιεί τη μείωση Poincaré-Prey ώστε να μείωση τη βαρύτητα της επιφάνειας στο μισό υψόμετρο του σημείου.

Έτσι τρεις υποθέσεις πραγματοποιούνται στη πράξη των ορθομετρικών υψομέτρων Helmert.

- Γραμμική συμπεριφορά της βαρύτητας μεταξύ επιφάνειας και γεωειδούς
- Μια σταθερά πυκνότητα φλοιού  $\rho=2670 \text{ Kg/m}^3$
- Μια καθορισμένη βαρύτητα ελεύθερου αέρα  $0,3086\text{mGal/m}$

Το ορθομετρικό υψόμετρο ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$H = \frac{c}{\bar{g}} \quad (1.2)$$

Όπου  $\bar{g}$  είναι η μέση βαρύτητα μεταξύ του γεωειδούς και του σημείου ενδιαφέροντος.

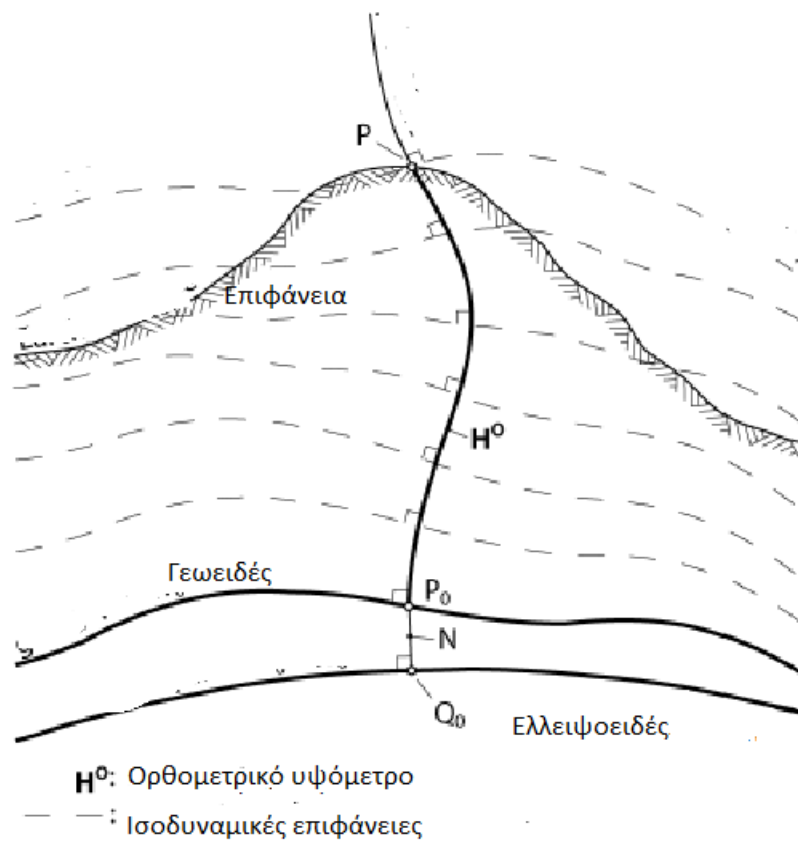
Για τη μετατροπή των μετρήσεων της χωροστάθμησης σε ορθομετρικά υψόμετρα εφαρμόζεται η ορθομετρική διόρθωση ή αναγωγή.

$$\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + OC_{AB} \quad (1.3)$$

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_B \quad (1.4)$$

Όπου  $\bar{g}_A$  και  $\bar{g}_B$  είναι η μέση τιμή βαρύτητας,  $\gamma_0^{45}$  η μέση τιμή κανονικής βαρύτητας γεωγραφικό πλάτος στις 45 μοίρες και  $\Delta n_{AB}$  οι διαφορές μετρούμενου υψομέτρων.

(Featherstone, 2006, Hoffman – Wellenhof and Moritz, 2006)



Σχήμα 1.1 Ορθομετρικό υψόμετρο. (Featherstone,2006)

### 1.3 Κανονικά υψόμετρα

Το κανονικό υψόμετρο(βλ. Σχήμα 1.2) είναι η απόσταση καμπύλης γραμμής που υπολογίζεται κατά μήκος της κατακόρυφης του κανονικού πεδίου βαρύτητας από το σημείο P στη επιφάνεια πάνω από το σχεδόν-γεωειδές ή η απόσταση από το τελουροειδές πάνω από το ελλειψοειδές.

Οι βασικές διαφορές από το ορθομετρικό σύστημα υψομέτρου είναι: η αποφυγή υποθέσεων για τον προσδιορισμό του πεδίου βαρύτητας μέσα στη μορφολογία εδάφους, τη θεωρητική αντικατάσταση της επιφάνειας της Γης από το τελουροειδές, τη χρήση ελλειψοειδούς αναφοράς με συνδυασμό του πεδίου βαρύτητας και τη παραδοχή ότι το πεδίο βαρύτητας της Γης ήταν ομαλό, που σημαίνει το πραγματικό δυναμικό βαρύτητας ισούται με το κανονικό πεδίο βαρύτητας.

Οι βασικές επιφάνειες αναφοράς στην περίπτωση των κανονικών υψομέτρων είναι:

- Το σχεδόν-γεωειδές είναι μια μη ισοδύναμη επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της Γης που συμπίπτει σε αρκετές περιπτώσεις με το γεωειδές.
- Το τελουροειδές, το οποίο είναι εύκολο να υπολογιστεί και δεν χρησιμοποιεί καθόλου μορφολογικά δεδομένα πυκνής πυκνότητας.

Το τελουροειδές είναι μια βοηθητική επιφάνεια που λαμβάνεται με την οπτική προβολή των σημείων P στην επιφάνεια της Γης κατά μήκος της ευθείας γραμμής κανονικού ελλειψοειδούς στα σημεία Q που έχουν το ίδια πιθανή τιμή βαρύτητας στο κανονικό πεδίο βαρύτητας UQ ως τα αρχικά σημεία P στο πεδίο βαρύτητας της Γη WP, δηλ.  $UQ = WP$ . Ως εκ τούτου, το τελουροειδές δεν είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Το κανονικό πεδίο βαρύτητας U είναι μια προσέγγιση του πραγματικού πεδίου βαρύτητας της Γης και δημιουργείται εννοιολογικά από μάζες εντός ενός ελλειψοειδούς αναφοράς. Επιπλέον, η επιφάνεια του ελλειψοειδούς αναφοράς επιλέγεται με τον τρόπο που είναι κανονική ισοδυναμική επιφάνεια και έχει την ίδια κανονική τιμή δυναμικού βάρους με την επιφάνεια του γεωειδούς σε σχέση με το πεδίο βαρύτητας της Γης.



Καθώς το κανονικό πεδίο βαρύτητας είναι καλά καθορισμένο, η ακέραια μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας κατά μήκος της κατακόρυφης μπορεί να προσδιοριστεί γνωρίζοντας τη θέση(κυρίως μόνο το γεωγραφικό πλάτος) του σημείου ενδιαφέροντος. Ωστόσο, λόγω της εξάρτησης από το ίδιο το κανονικό υψόμετρο (το σημείο στο τελουροειδές είναι αρχικά άγνωστο) ο προσδιορισμός γίνεται επαναληπτικά.

Το σύστημα κανονικού υψομέτρου είναι λιγότερο εφαρμόσιμο στην πράξη από ότι, για παράδειγμα, το ορθομετρικό υψόμετρο.

Το κανονικό υψόμετρο ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$H^n = \frac{c}{\bar{\gamma}} \quad (1.5)$$

Όπου  $\bar{\gamma}$  η μέση τιμή κανονικής βαρύτητας.

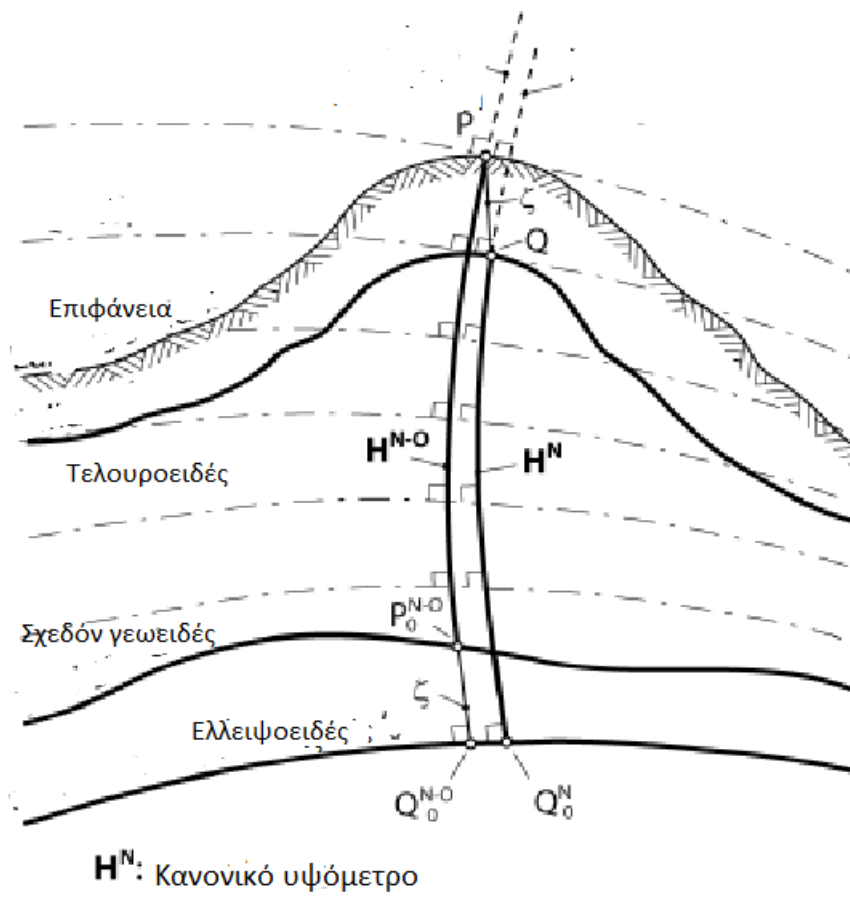
Για τη μετατροπή των μετρήσεων της χωροστάθμησης σε κανονικά υψόμετρα εφαρμόζεται η κανονική διόρθωση.

$$\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + NC_{AB} \quad (1.6)$$

$$NC_{AB} = \sum_A^B \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta n + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_A^N - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_B^N \quad (1.7)$$

Όπου  $g$  η μέση βαρύτητα,  $\bar{\gamma}_A$  και  $\bar{\gamma}_B$  η μέση τιμή κανονικής βαρύτητας,  $\gamma_0^{45}$  η μέση τιμή κανονικής βαρύτητας γεωγραφικό πλάτος στις 45 μοίρες και  $\Delta n_{AB}$  οι διαφορές μετρούμενων υψομέτρων.

(Featherstone, 2006, Hoffmann – Wellenhof and Moritz, 2006)



Σχήμα 1.2 Κανονικό υψόμετρο. (Featherstone,2006)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

### 2.1 Πεδίο βαρύτητας

Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος εκείνος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη, όπου κάθε μάζα δημιουργεί γύρο της πεδίο και εάν κάποια άλλη μάζα βρεθεί μέσα σε αυτό το πεδίο, θα δεχθεί δύναμή από αυτό.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα του βαρυτικού πεδίου είναι οι καθαρά ελκτικές δυνάμεις οι οποίες εμφανίζονται σ' αυτό.

Η συνολική δύναμη(βαρύτητα/δυναμικό βαρύτητας  $W$ ) που ενεργεί σε ένα σώμα που ακουμπάει στην επιφάνεια της γης ή βρίσκεται στο χώρο του πεδίου βαρύτητας της, είναι αποτέλεσμα της βαρυτικής δύναμης/δυναμικού έλξης  $V$ (διεύθυνση την ακτίνας της γης και φορά προς το κέντρο της) και της φυγοκεντρικής δύναμης/φυγόκεντρο δυναμικό της περιστροφής της γης  $\Phi$  και ονομάζεται βαρύτητα. Η βαρύτητα ισούται με το άθροισμα του δυναμικού έλξης( $V$ ) και του φυγόκεντρου δυναμικού( $\Phi$ ), και η μονάδα μέτρησης στο SI είναι το  $ms^{-2}$ .

Επειδή η  $G$  μας δεν είναι μια κανονική μπάλα, δεν συνίσταται σε όλα τα μέρη της από πέτρες της ίδιας πυκνότητας και περιστρέφεται συνεχώς, τότε, επομένως, η βαρύτητα σε κάθε σημείο της επιφάνειας της γης είναι ελαφρώς διαφορετική. Επομένως, σε κάθε σημείο της γης το μέγεθος της βαρύτητας εξαρτάται από το μέγεθος της φυγοκεντρικής δύναμης, η οποία μειώνει τη δύναμη έλξης, από την πυκνότητα των μαζών της γης και την απόσταση από το κέντρο της γης. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η απόσταση, τόσο μικρότερη είναι η βαρύτητα.

Η φυγοκεντρική δύναμη  $\Phi$  σε μια μονάδα μάζας δίνεται από τον τύπο

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2} d^2 \quad (2.1)$$

όπου  $\omega(7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1})$  είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της γης και  $d$  είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

Στον ισημερινό, φτάνει στο μέγιστο της μέγεθος και όσο απομακρυνόμαστε από αυτόν τόσο μειώνεται.

Η βαρυτική δύναμη είναι η ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο μαζών. Βαρυτικές δυνάμεις ασκούνται σε όλο το σύμπαν και ακολουθούν το Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.2)$$

όπου  $G=6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Κάθε σώμα ελκύει κάθε άλλο σώμα με δύναμη που είναι ανάλογη των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης.

Ο νόμος αυτός ισχύει μόνο για σημειακές μάζες. Για τον υπολογισμό της ελκτικής δύναμης μεταξύ ενός εκτεταμένου σώματος μάζας  $M$  και μιας σημειακής μάζας  $m$ , εκλέγεται μια στοιχειώδης μάζα  $dM$  που απέχει κατά  $r$  από τη μάζα  $m$ . Τότε η στοιχειώδης δύναμη μεταξύ των δυο αυτών μαζών είναι:

$$df = G \frac{mdM}{r^2} \quad (2.3)$$

Η βαρυτική δύναμη είναι μεγαλύτερη όταν τα σώματα είναι πλησιέστερα ή όταν έχουν μεγαλύτερη μάζα.

Στη περίπτωση της Γης ισχύει για το δυναμικό έλξης των μαζών:

$$V = G \iiint_{\gamma\eta} \frac{dm}{l} \quad (2.4)$$

Όπου  $dm$ (στοιχειώδη γήινη μάζα ) και  $l$  η απόσταση ανάμεσα στη στοιχειώδη γήινη μάζα και το ελκόμενο σημείο.

Στην περίπτωση που η Γη θεωρηθεί σφαιρική με ακτίνα  $R$ , τότε για σημεία εκτός της μάζας της Γης ισχύει:

$$V = \frac{Gm}{r} \quad (2.5)$$

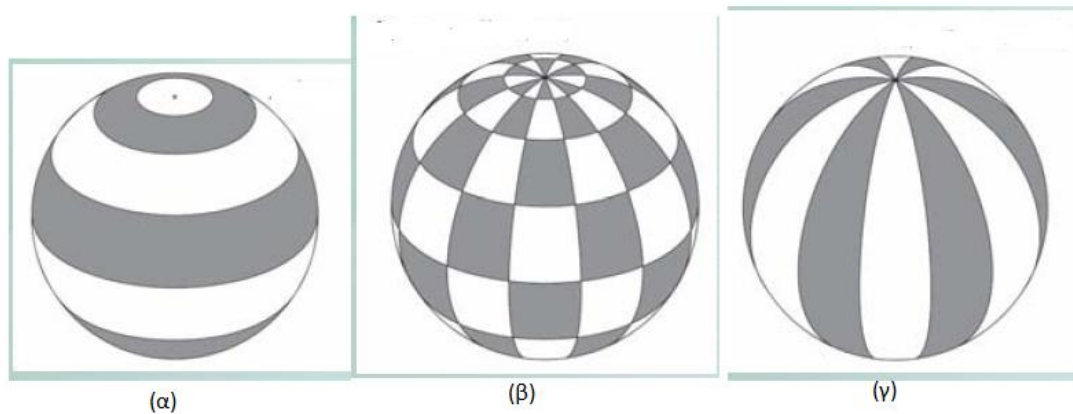
Όπου  $m$  είναι η μάζα και  $r$  η απόσταση από το κέντρο της γης.

(Αράμπελος, 2007 και Αράμπελος, 1991, Hoffman – Wellenhof and Moritz, 2005)

Το γήινο δυναμικό έλξης αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές και είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο λύσεων της εξίσωσης Laplace σε ένα σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} [\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)] \quad (2.6)$$

Έτσι, κάθε αρμονικό δυναμικό μπορεί να επεκταθεί σε στερεές σφαιρικές αρμονικές, για αυτόν τον λόγο το σταθερό μέρος του βαρυτικού δυναμικού της Γης πάνω από την επιφάνεια της Γης εκφράζεται πρακτικά σε παγκόσμια κλίμακα, συνοψίζοντας πάνω από το βαθμό και τη σειρά μιας σφαιρικής αρμονικής ανάπτυξης. Υπάρχουν τρία είδη σφαιρικών αρμονικών (βλ. Σχήμα 2.1): α) αρμονικές ζώνης β) τραπεζοειδές αρμονικές γ) αρμονικές τομέα.



**Σχήμα 2.1** Τυπική γεωμετρική ερμηνεία των σφαιρικών αρμονικών (Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου, 2011)

Οι συντελεστές σφαιρικών αρμονικών αναπαριστούν την ανωμαλία του πεδίου βαρύτητας της Γης, την αποχή του γεωειδούς και την απόκλιση της κατακορύφου, όπου μπορούν να αναπτυχθούν σε σφαιρικές αρμονικές. Η απόκλιση της κατακορύφου ορίζεται ως η διαφορά στη διεύθυνση μεταξύ καθέτου στο ελλειψοειδές και κατακορύφου(διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας) και αναλύεται σε δύο συνιστώσες ξ(συνιστώσα κατά τη μεσηβρινή τομή) και η(συνιστώσα κατά τη πρώτη κάθετη τομή).

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} [\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)] \quad (2.7)$$

$$N(r, \theta, \lambda) = R [\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)] \quad (2.8)$$

$$\xi(r, \theta, \lambda) = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (2.9)$$

$$\eta(r, \theta, \lambda) = - \frac{1}{\cos \varphi} [\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) m \bar{P}_{nm}(\cos \theta)] \quad (2.10)$$

Μια σφαιρική αρμονική προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας έως ένα μέγιστο βαθμό  $\ell_{max}$  (το λεγόμενο «μοντέλο πεδίου βαρύτητας») αποτελείται από  $(\ell_{max} + 1) \cdot 2$  συντελεστές και 2 τιμές για GM και R με τις οποίες σχετίζονται οι συντελεστές.

Οι σφαιρικές αρμονικές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, οπότε  $r_{topo} = r_{topo}(\lambda, \varphi)$  είναι η απόσταση του σημείου στην τοπογραφία (επιφάνεια της Γης) από το κέντρο της Γης και το  $\varphi$  είναι το σφαιρικό γεωγραφικό πλάτος που πρέπει να ξεχωρίζεται από το ελλειψοειδές πλάτος  $\phi$ .

Κάθε παράσταση μιας συνάρτησης σε σφαιρικές αρμονικές με ανώτερο όριο άθροισης το  $l_{max} < \infty$  αντιστοιχεί σε χαμηλοπερατό φιλτραρίσματος και το  $l_{max}$  συσχετίζεται με τη χωρική ανάλυση στην επιφάνεια της Γης. Αποτελεί δε, μια συνηθισμένη απλή εκτίμηση του μικρότερου αντιπροσωπευόμενου χαρακτηριστικού του πεδίου βαρύτητας.

Με άλλα λόγια, το μικρότερο μήκος μισού κύματος  $\psi_{min}$  (ως σφαιρική απόσταση), που μπορεί να επιλυθεί με το  $(l_{max} + 1)^2$  παράμετροι  $C_{lm} S_{lm}$  είναι:

$$\psi_{min}(l_{max}) \approx \frac{\pi R}{l_{max}} \quad (2.11)$$

Η ανάλυση των σφαιρικών αρμονικών είναι ομοιόμορφη στη σφαίρα. Αυτό προκύπτει από το γνωστό γεγονός ότι υπό περιστροφή, μια σφαιρική αρμονική του βαθμού  $\ell$  μετατρέπεται σε γραμμικό συνδυασμό σφαιρικών αρμονικών του ίδιου βαθμού.

Εάν διαιρέσουμε την επιφάνεια της σφαίρας, δηλ.  $4\pi R^2$ , σε τόσα τραπεζοειδή κομμάτια  $A_{min}$  όσο και τον αριθμό των σφαιρικών αρμονικών συντελεστών, δηλαδή  $(l_{max} + 1)^2$ , τότε το μέγεθος κάθε κομματιού είναι:

$$A_{min}(l_{max}) = \frac{4\pi R^2}{(l_{max}+1)^2} \quad (2.12)$$

Η διάμετρος ενός σφαιρικού καλύμματος αυτού του μεγέθους είναι (σε μονάδες σφαιρικής απόστασης):

$$\psi_{min}(l_{max}) = 4\arcsin\left(\frac{1}{l_{max}+1}\right) \quad (2.13)$$

(Αράμπελος,2007,Franz Barthelmes,2013)

## 2.2 Γεωδυναμικά μοντέλα

Τα γεωδυναμικά μοντέλα είναι αναπτύγματα σφαιρικών αρμονικών συντελεστών, που υπολογίζονται και χορηγούνται από διάφορες επιστημονικές υπηρεσίες και πανεπιστημιακά ιδρύματα στον κόσμο. Δίνουν πληροφορίες για τον γήινο πεδίο βαρύτητας σε σφαιρική προσέγγιση και για παραμέτρους που συνδέονται με αυτό, π.χ. γεωειδές, απόκλιση της κατακόρυφου, κ.α. Αναπτύσσονται μέχρι ένα μέγιστο βαθμό και τάξη που αντιστοιχεί στη διαθεσιμότητα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται, στην ποιότητα τους και στη δυνατότητα επεξεργασίας των υπολογιστικών συστημάτων.

Τα πρώτα μοντέλα υπολογίσθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του '70 από το ερευνητικό κέντρο διαστημικών πτήσεων GSFC της NASA και είναι τα γνωστά μοντέλα GEM, όπως τα (GEM 1,3...,9) και (GEM2,4...,10). Οι περιττοί αριθμοί δηλώνουν λύσεις γεωδυναμικού που έχουν προέλθει από αμιγή δορυφορικά δεδομένα, ενώ οι άρτιοι αριθμοί δηλώνουν λύσεις που έχουν προέλθει από το συνδυασμό δορυφορικών λύσεων με επίγεια δεδομένα.

Την δεκαετία του '80 υπολογίζονται από μια σειρά ερευνητικών κέντρων μοντέλα γεωδυναμικού, κατά κανόνα από το συνδυασμό δορυφορικών και επίγειων δεδομένων βαρύτητας, που οι βαθμοί ανάπτυξης κυμαίνονται από 180 μέχρι 360. Τα βασικότερα μοντέλα αυτής της περιόδου υπολογίσθηκαν από το γεωδαιτικό ινστιτούτο του πολιτειακού πανεπιστημίου του Ohio (Ohio State University-OSU), τα γνωστά OSU γεωδυναμικά μοντέλα, όπως τα OSU81, OSU86C. Τα μοντέλα έχουν ως βάση μια αλτιμετρική λύση μέχρι βαθμό 30, ενώ για μεγαλύτερο βαθμό έχει προέλθει από επίγειες μέσες τιμές βαρύτητας για τη ξηρά και αλτιμετρικές μετρήσεις για τη θάλασσα, οι οποίες μετατράπηκαν με τους κατάλληλους αλγόριθμους σε ανωμαλίες βαρύτητας. Οι δορυφορικές λύσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα προϋπάρχοντα δορυφορικά μοντέλα GEM.

Από της αρχές της δεκαετίας του '90 μέχρι σήμερα υπολογίσθηκαν διάφορα μοντέλα συνδυασμού για το γεωδυναμικό, π.χ. JGM-1, JGM-2 (Joint Gravity models) στο πανεπιστήμιο του Texas στις ΗΠΑ. Είναι αξιοσημείωτο ότι στα μοντέλα αυτά χρησιμοποιήθηκαν τα πρώτα δεδομένα του αλτιμετρικού δορυφόρου TOPEX/POSEIDON.

Ιδιαίτερη ώθηση έδωσαν τα τελευταία χρόνια στην ανάπτυξη μοντέλων σφαιρικών αρμονικών τα υψηλής διακριτικής ικανότητας και ακρίβειας δεδομένα της δορυφορικής αλτιμετρίας των δορυφορικών αποστολών ERS-1/ERS-2 (European Remote Sensing Satellite), οι οποίες παρουσιάζουν το πλεονέκτημα των ακριβώς επαναλαμβανόμενων τροχιών, η τροχιά των οποίων προσδιορίζεται με ιδιαίτερα υψηλή ακρίβεια, καθώς είναι εφοδιασμένες με δέκτες GPS και χρησιμοποιούνται ως δορυφόροι αναφοράς στη προσέγγιση και διόρθωση των τροχιών όλων των άλλων αλτιμετρικών δορυφόρων.

(Αράμπελος, 2007)



### 2.2.1 EGM96

Η δημιουργία του προέκυψε από τη τριετή συνεργασία, η οποία συνδύασε τις γνώσεις, τους πόρους και τα διαθέσιμα δεδομένα από τη NASA, την Υπηρεσία Τοπογραφίας και Χαρτογραφίας των ΗΠΑ (NIMA) και του γεωδαιτικού ινστιτούτου του πολιτειακού πανεπιστημίου του Ohio.

Προσεγγίζει το γεωειδές σε παγκόσμια κλίμακα με μια ακρίβεια 0.5-1m.

Συνδυάζεται ένα μοντέλο συνδυασμού χαμηλού βαθμού (σε βαθμό 70) (που προκύπτει από το συνδυασμό δεδομένων δορυφορικής παρακολούθησης, δεδομένων επιφανειακής βαρύτητας και αλτιμετρικά δεδομένα ) που βασίζεται στις πιο ολοκληρωμένες και αυστηρές τεχνικές μοντελοποίησης και εκτίμησης, με μοντέλα υψηλού βαθμού (πέραν του βαθμού 70 έως του βαθμού 360), όπου προέκυψαν από επίγειες ανωμαλίες βαρύτητας( πρωτογενή δεδομένα, αλτιμετρικά δεδομένα[ αλτιμετρικοί δορυφόροι ERS-1 και GEOSAT]).

Οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση της απόδοσης των μοντέλων είναι : παρακολούθησης μέσω δορυφόρου, συγκρίσεων GPS / χωροστάθμησης-αποχή γεωειδούς, τοπογραφία της θαλάσσιας επιφάνειας με μοντέλα κυκλοφορίας ωκεανών, συγκρίσεις ανωμαλιών βαρύτητας προερχόμενες από αλτιμετρικά δεδομένα και άλλες δοκιμές γεωειδούς εδάφους και ωκεανών.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μοντελοποίηση βαρυτικού πεδίου περιλαμβάνουν : (α)την ενσωμάτωση νέων δεδομένων επιφανειακής βαρύτητας, δεδομένων παρακολούθησης μέσω δορυφόρου και δεδομένων υψομέτρου σε μια γεωδυναμική λύση 360x360, (β) βελτιωμένη ακρίβεια μοντέλου, (γ) ανάπτυξη σημαντικών υποπροϊόντων/ διαμέσων προϊόντων λύσης, συμπεριλαμβανομένου ενός παγκόσμιου τοπογραφικού μοντέλου που χρησιμοποιείται για τη αναγωγή επιφανειακών δεδομένων βαρύτητας και ταυτόχρονη εκτίμηση μιας παλιρροιακής λύσης μαζί με τους γεωδυναμικούς συντελεστές, (δ) σχεδιασμό, δοκιμή και εφαρμογή της επίλυσης με τη μέθοδο της διαγώνιου κατά μέρη(block-diagonal solution) και την ανάπτυξη λύσεων υψηλού βαθμού.

Την επεξεργασία των δεδομένων επιφανειακής βαρύτητας ανέλαβε η NIMA για τη διαμόρφωση εκτιμήσεων μέσης ανωμαλίας βαρύτητας 30' x30'. Οι μέσες τιμές των 30' υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας συνόρθωση ελάχιστων τετραγώνων. Αυτό ισχύει για όλες τις ηπειρωτικές περιοχές όπου λεπτομερής βαρυτημετρία ήταν εφικτή, καθώς και για τις περιοχές που καλύπτονται από αέρα βαρυτημετρία. Πάνω από τους περισσότερους ωκεανούς της Γης, τιμές μέσης ανωμαλίας βαρύτητας 30' υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας δεδομένα αλτιμετρικού ραντάρ από τον δορυφόρο GEOSAT του Πολεμικού Ναυτικού των ΗΠΑ κατά τη διάρκεια της Γεωδαιτικής Αποστολής του. Οι μέσες ανωμαλίες βαρύτητας που προέρχονται από δεδομένα αλτιμετρίας του δορυφόρου ERS-1 χρησιμοποιήθηκαν σε περιοχές του ωκεανού που δεν καλύπτονται από το GEOSAT.

Το σύστημα TDRSS(Tracking and Data Relay Satellite System) και η παρακολούθηση δορυφόρων GPS που αποκτήθηκαν σε χαμηλό υψόμετρο (525 km), με χαμηλή κλίση (28,5 °), και του δορυφόρου EP / EUVE παρείχαν μια μεγάλη βελτίωση μοντελοποίησης στις περιοχές του ισημερινού. Ενώ μόνο τρεις δορυφόροι που παρακολουθούνταν από αυτά τα συστήματα χρησιμοποιήθηκαν (TOPEX / POSEIDON, EP / EUVE και GPS / MET), αυτά τα δεδομένα αντιπροσωπεύουν ένα αρκετά μεγάλο μέρος των δεδομένων παρατήρησης που χρησιμοποιήθηκαν στο EGM96.

(Pavlis,2012, <https://cdis.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>, Αράμπελος,2007)

### 2.2.2 EGM2008

Το παγκόσμιο μοντέλο γεωειδούς προέκυψε από τη συνεργασία της NASA και της Υπηρεσίας Τοπογραφίας και Χαρτογραφίας των ΗΠΑ (NIMA), η οποία μετονομάστηκε το 2008 στον Εθνικό Οργανισμό Γεωχωρικών Πληροφοριών των ΗΠΑ(NGA). Αντικατέστησε το μοντέλο EGM96, το οποίο ήταν το προεπιλεγμένο παγκόσμιο γεωειδές από τη δημοσίευσή του το 1996. Το μοντέλο υπολογίστηκε από ένα παγκόσμιο πλέγμα βαρύτητας 5' και δορυφορικές παρατηρήσεις. Το μοντέλο είναι πλήρες σε αρμονικό βαθμό και τάξη 2160, η οποία ισοδυναμεί με μέγεθος πλέγματος περίπου 6,5 km στην επιφάνεια της Γης και περιέχει περίπου 4,7 εκατομμύρια σφαιρικούς αρμονικούς συντελεστές.

Το EGM2008 είναι ένα σφαιρικό αρμονικό μοντέλο του βαρυτικού δυναμικού της Γης που αναπτύχθηκε μέσω ενός συνδυασμού ελάχιστων τετραγώνων του βαρυτικού μοντέλου ITG-GRACE03S και του σχετικού πίνακα συμμεταβλητοτήτων των σφαλμάτων, με τις βαρυτικές πληροφορίες που λαμβάνονται από ένα παγκόσμιο πλέγμα ανωμαλίων βαρύτητας ελεύθερου αέρα 5'x5'.

Το EGM2008 έχει αναπτυχθεί συνδυάζοντας τα διαστημικά δορυφορικά δεδομένα GRACE, δεδομένα εδάφους και υψομετρίας και τα δεδομένα επιφανειακής βαρύτητας.

Αναπτύχθηκε με την ανάλυση δεδομένων Satellite-to-Satellite Tracking (SST) από την αποστολή GRACE, διάρκειας 57 μηνών.

Σε ορισμένες περιοχές, τα διαθέσιμα επίγεια δεδομένα ήταν απόρρητα και μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μόνο έως την ανάλυση 15' x 15', η οποία αντιστοιχεί στον αρμονικό βαθμό 720. Για την αντιστάθμιση αυτού του περιορισμού, το βαρυτικό σήμα που προέρχεται από την τοπογραφία της Γης, χρησιμοποιήθηκε το υπολειπόμενο μοντέλο τοπογραφίας (residual terrain model), για να συμπληρώσει το φασματικό εύρος ζώνης των απόρρητων δεδομένων.

Το EGM2008 ενσωμάτωσε τις πληροφορίες δεδομένων βαρύτητας έως το μέγιστο αρμονικό βαθμό 900 που αντιστοιχεί περίπου σε ανάλυση 12'.

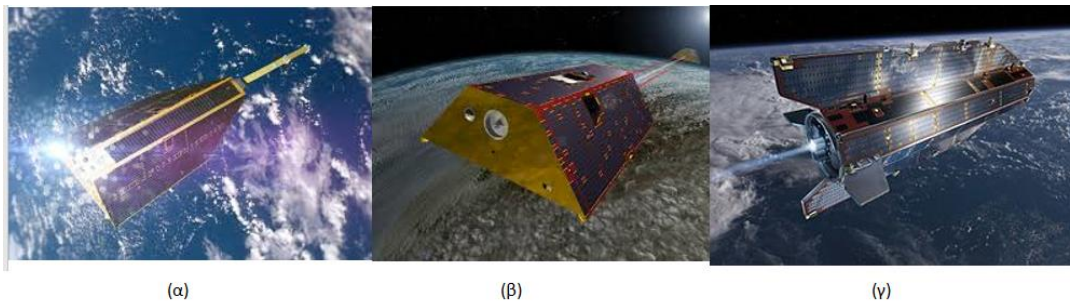
Οι τοπογραφικές πληροφορίες που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάπτυξη του EGM2008 προέρχονται από το παγκόσμιο ψηφιακό τοπογραφικό μοντέλο (DTM) DTM2006.0.

(Chymyrov 2014, National Geospatial-Intelligence Agency 2014, Kwang 2020, WenBin Shen 2013)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΩΝ ΔΟΡΥΦΟΡΩΝ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

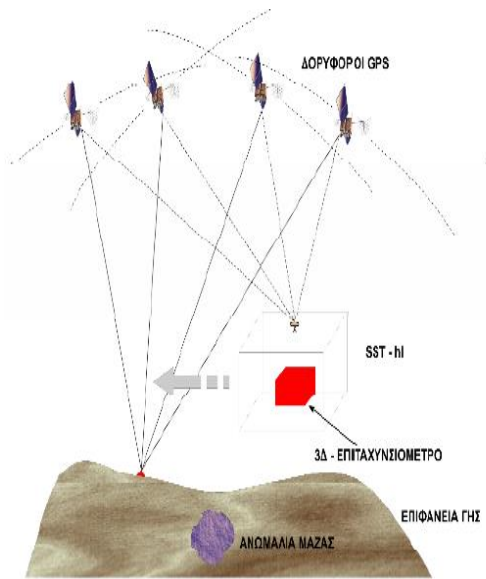
### 3.1 Εισαγωγή

Η πραγματοποίηση επίγειων μετρήσεων βαρύτητας με επίγειες μεθόδους σε παγκόσμια κλίμακα έχει ως αποτέλεσμα πολύ μεγάλο κόστος και απαγορευτικό χρονικό ορίζοντα υλοποίησης. Η μόνη λύση που θα μπορούσε να εγγυηθεί ομογένεια στα δεδομένα, στα ποιοτικά χαρακτηριστικά τόσο ως προς την ακρίβεια όσο και προς την αξιοπιστία και ταυτόχρονα παγκόσμια κάλυψη, είναι η συλλογή παρατηρήσεων σχετικών με το πεδίο βαρύτητας της Γης από το διάστημα. Το σημαντικότερο πρόβλημα στη παρατήρηση του πεδίου βαρύτητας από το διάστημα είναι η ομαλοποίηση του σήματος εξαιτίας του υψόμετρου πτήσης των δορυφόρων. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που το υψόμετρο πτήσης των δορυφορικών αποστολών για το πεδίο βαρύτητας της Γης είναι πολύ χαμηλό (454 km) για τον CHAMP(βλ. Σχήμα 3.1), σχεδόν 490 km για τον GRACE-FO(βλ. Σχήμα 3.1) και μόλις 254 km για τον GOCE(βλ. Σχήμα 3.1) σε σύγκριση με τους αλτιμετρικούς δορυφόρους (~1360 km) και τους δορυφόρους GPS (~20000 km).

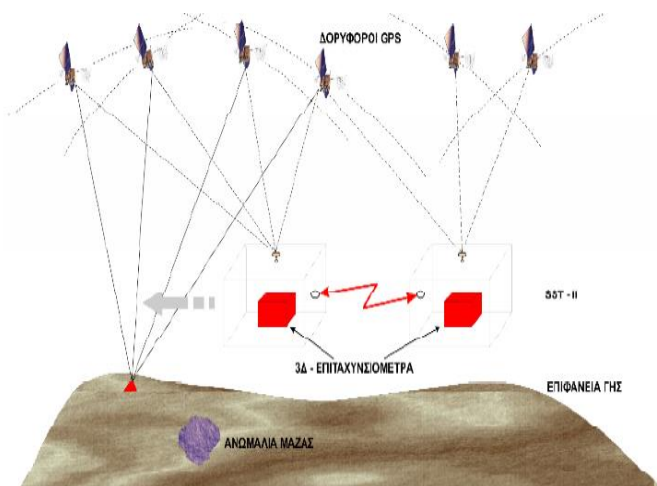


**Σχήμα 3.1** Οι δορυφόροι παρακολούθησης του πεδίου βαρύτητας (α)CHAPM (β)GRACE-FO και (γ)GOCE (Βέργος,2011, National Aeronautics and Space Administration)

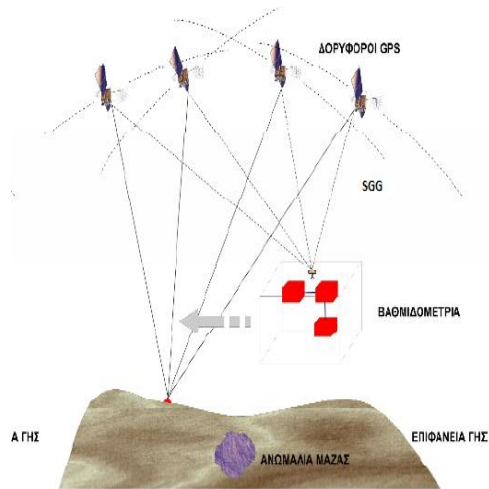
Η μέτρηση και η παρακολούθηση του πεδίου βαρύτητας της Γης πραγματοποιείται με τρεις βασικές τεχνικές: α) η τεχνική της υψηλής-χαμηλής παρακολούθησης(βλ. Σχήμα 3.2)δορυφόρου προς δορυφόρο (hi-low satellite to satellite tracking – SST-hl), β) η τεχνική της χαμηλής-χαμηλής παρακολούθησης δορυφόρου προς δορυφόρο (low-low satellite to satellite tracking – SST-ll), και γ) η τεχνική της δορυφορικής βαθμιδομετρίας (satellite gravity gradiometry– SGG).



Σχήμα 3.2 Η τεχνική παρατήρησης SST-I (Βέργος,2011)



Σχήμα 3.3 Η τεχνική παρατήρησης SST-II (Βέργος,2011)



**Σχήμα 3.4** Η τεχνική παρατήρησης SGG (Βέργος,2011)

Οι διαθέσιμες δορυφορικές αποστολές για την παρακολούθηση του πεδίου βαρύτητας της Γης είναι αυτές του CHAMP, που χρησιμοποίησε την τεχνική SST-I, του ζεύγους δορυφόρων GRACE-FO που χρησιμοποιεί την τεχνική SST-II, και η αποστολή του δορυφόρου GOCE, που χρησιμοποιούσε την τεχνική SGG.

Η δορυφορική αποστολή CHAMP (Challenging Mini-satellite Payload) αποτελεί την πρώτη προσπάθεια για παρατήρηση του πεδίου με αρχικό τροχιακό υψόμετρο 454 km. Βάσει του σχεδιασμού του δορυφόρου ο αναμενόμενος χρόνος ζωής και καλής λειτουργίας του ήταν 5 χρόνια. Αυτή η πρόβλεψη για τον χρόνο ζωής του δορυφόρου CHAMP όχι μόνο επιβεβαιώθηκε αλλά ξεπεράστηκε κατά πολύ, αφού ο δορυφόρος ολοκλήρωσε την αποστολή του στις 19 Σεπτεμβρίου 2010, μετά από περισσότερα από 10 χρόνια επιτυχούς λειτουργίας. Προκειμένου να εξασφαλισθεί αυτό, και εξαιτίας του ότι ο δορυφόρος πέρασε από το μέγιστο της ηλιακής δραστηριότητας το 2001, ήταν αναγκαία η πραγματοποίηση δύο διορθωτικών παρεμβάσεων στην τροχιά του (Μάρτιος και Σεπτέμβριος 2002, Ιανουάριος 2006) ώστε να ανακτήσει υψόμετρο και να μπορέσει έτσι να προσφέρει δεδομένα για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Στην κατεύθυνση αυτή συνέβαλλε και η πολύ μικρή ηλιακή δραστηριότητα καθ' όλη τη διάρκεια της αποστολής του. Στο τέλος της αποστολής του ο δορυφόρος βρισκόταν σε ένα μέσο τροχιακό υψόμετρο 137 km από το οποίο και εισήλθε στην ατμόσφαιρα της Γης. Ο δορυφόρος CHAMP χρησιμοποίησε την τεχνική της υψηλής-χαμηλής παρακολούθησης δορυφόρου προς δορυφόρο (SST-I) για την παρακολούθηση του πεδίου βαρύτητας της Γης και είχε σαν κύριο στόχο τη βελτίωση της ακρίβειας των αρμονικών μεγάλου μήκους κύματος (χαμηλές συχνότητες).

(Βέργος,2011)

Η δορυφορική αποστολή GRACE-FO χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο για να χαρτογραφήσει το πεδίο βαρύτητας όπως ήταν η αποστολή του δορυφόρου GRACE. Αποτελείται από δύο δορυφόρους οι οποίοι ταξιδεύουν κατά μήκος της ίδιας τροχιάς, ένας περίπου 137 μίλια (220 χιλιόμετρα) πίσω από τον άλλο και αναπτύσσονται σε σχεδόν κυκλική πολική τροχιά σε υψόμετρο σχεδόν 300 μιλίων (490 χιλιόμετρα).

Καθώς ο κύριος δορυφόρος πλησιάζει μια περιοχή με μεγάλη μάζα, όπως μια οροσειρά, η υψηλότερη βαρυτική έλξη έλκει τον δορυφόρο λίγο πιο μπροστά από τον ακόλουθο δορυφόρο. Λίγο αργότερα, ο ακόλουθος δορυφόρος έλκεται προς τα εμπρός με τη σειρά του, μειώνοντας την απόσταση μεταξύ τους. Όταν ο κύριος δορυφόρος κινείται πέρα από τα βουνά, η μάζα τους τον έλκει προς τα πίσω, μειώνοντας και πάλι το χάσμα μεταξύ των δύο δορυφόρων. Οι δύο δορυφόροι στέλνουν συνεχώς μεταξύ τους σήματα μικροκυμάτων, μετρώντας με ακρίβεια τις αλλαγές στην απόσταση μεταξύ τους.

Στους δορυφόρους είναι ενσωματωμένο ένα εξαιρετικά ακριβές επιταχυνσιόμετρο, που βρίσκεται στο κέντρο μάζας κάθε δορυφόρου και δορυφορικοί δέκτες GPS καθορίζουν την ακριβή θέση των δορυφόρων σε τροχιά γύρω από τη Γη.

Όλες αυτές οι πληροφορίες αποστέλλονται στο έδαφος και προωθούνται σε κέντρα επεξεργασίας δεδομένων, όπου οι παρατηρήσεις συνδυάζονται για την κατασκευή μηνιαίων χαρτών του μέσου πεδίου βαρύτητας της Γης.

Η δορυφορική αποστολή GRACE-FO αποστολή ξεκίνησε την άνοιξη του 2018 και έχει σχεδιαστεί για λειτουργία τουλάχιστον πέντε χρόνια. Αφορά μια συνεργασία μεταξύ της NASA και του Γερμανικού Κέντρου Ερευνών για τις Γεωεπιστήμες (Geo Forschungs Zentrum ή GFZ).

(National Aeronautics and Space Administration)

Η δορυφορική αποστολή GOCE ήταν μια αποστολή ESA αφιερωμένη στη μέτρηση του πεδίου βαρύτητας της Γης και στη μοντελοποίηση του γεωειδούς. Ήταν η πρώτη αποστολή Earth Explorer Core που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος Living Planet της ESA. Η GOCE εκτοξεύτηκε στις 17 Μαρτίου 2009 σε έναν τροποποιημένο ρωσικό διηπειρωτικό βαλλιστικό πύραυλο και από της 29 Σεπτεμβρίου του 2009 ήταν σε πλήρη λειτουργία.

Το τμήμα επιχειρησιακών πτήσεων GOCE (FOS) και FCT βρίσκονταν στο ESOC, Ντάρμστατ, Γερμανία. Το FCT ήταν υπεύθυνο για όλες τις δορυφορικές λειτουργίες, διασυνδέοντας με άλλες ομάδες εδάφους, συμπεριλαμβανομένων των δυναμικών πτήσεων, των επίγειων εγκαταστάσεων και της υποστήριξης λογισμικού. Τα επιστημονικά δεδομένα μεταφέρονταν από την ESOC στην ESA / ESRIN για αρχική επεξεργασία και διανομή στους επιστήμονες.

Ο δορυφόρος αποτελούνταν από ένα μονό άκαμπτο οκτάγωνο διαστημικό σκάφος, μήκους 5 m και διαμέτρου 1 m με σταθερά φτερά ηλιακής ενέργειας και χωρίς κινούμενα μέρη. Βρίσκονταν σε εξαιρετικά χαμηλή τροχιά σε υψόμετρο 254 km, χαμηλότερα από οποιαδήποτε άλλη αποστολή παρατήρησης της Γης.

Η δορυφορική αποστολή GOCE διέθετε τα ακόλουθα επιστημονικά όργανα:

1. EGG: τριών αξόνων βαρυτήμετρο αποτελούμενο από 3 ζεύγη ελεγχόμενων από σερβομηχανισμούς επιταχυνσιόμετρων που στηρίζονταν το καθένα σε ένα ακλόνητο βραχίονα από κράμα άνθρακα σε μια εξαιρετικά σταθερή δομή άνθρακα-άνθρακα. Η αρχή του βηματομέτρου βασιζόταν σε διαφορά επιταχύνσεων της βαρύτητας, στις συγκεκριμένες μάζες "ελέγχου" που βρίσκονταν μέσα στο δορυφόρο.
2. Δέκτη GPS 12 καναλιών που είχε σχεδιαστεί για να λειτουργεί σε περιβάλλον χαμηλής τροχιάς και παρέχοντας δεδομένα για ακριβή προσδιορισμό τροχιάς. Χρησιμοποιούνταν επίσης για πλοήγηση σε πραγματικό χρόνο και για καθορισμό πλαισίου αναφοράς υψομέτρου.
3. Ανακλαστήρες λέιζερ που χρησιμοποιούνταν για τη παρακολούθηση με επίγεια λέιζερ, μέσω της ανάκλισης παλμών λέιζερ κατά μήκος της προσκύπτουσας ακτίνα φωτός που εκπέμπονταν προς τον δορυφόρο από επίγειους σταθμούς δορυφορικών συστημάτων λέιζερ.

Η δορυφορική αποστολή GOCE έληξε στις 11 Νοεμβρίου 2013 μετά από μια προγραμματισμένη καταστροφική επανένταξη στην ατμόσφαιρα.

(<https://earth.esa.int/web/eoportal/satellite-missions/g/goce>,

[https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Operations/GOCE](https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/GOCE),

[https://www.esa.int/Applications/Observing\\_the\\_Earth/GOCE/Taking\\_gravity\\_from\\_strength\\_to\\_strength](https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/GOCE/Taking_gravity_from_strength_to_strength),

[https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite\\_missions/past\\_missions/goce\\_general.html](https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite_missions/past_missions/goce_general.html))



Οι τρεις τεχνικές παρατήρησης του πεδίου βαρύτητας από το διάστημα, δηλαδή οι SST-I, SST-II και SGG, βασίζονται στον συνδυασμό ενός ή περισσοτέρων επιταχυνσιομέτρων και στην παρακολούθηση δορυφόρου προς δορυφόρο, είτε μεταξύ των δορυφόρων αυτών καθ' αυτών είτε προς τους δορυφόρους GPS. Οι τρεις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν όλες οι αποστολές παρατήρησης του πεδίου βαρύτητας της Γης από το διάστημα είναι α) να υπάρχει δυνατότητα συνεχούς και αδιάκοπης παρατήρησης των δορυφόρων αυτών στον τρισδιάστατο χώρο, β) να υπάρχει η δυνατότητα μέτρησης ή μείωσης της επίδρασης των μη-βαρυτικών δυνάμεων ώστε να μπορεί να απομονωθεί το βαρυτικό σήμα, και γ) το ύψος πτήσης να είναι όσο πιο χαμηλό και πιο κοντά στις ελκτικές μάζες προκειμένου η ομαλοποίηση του σήματος λόγω υψομέτρου να είναι η μικρότερη δυνατή.

Στη τεχνική SST-I ο δορυφόρος βρίσκεται σε χαμηλό υψόμετρο τροχιάς (Low Earth Orbiter – LEO) είναι εξοπλισμένος με δέκτη που μπορεί να λαμβάνει σήμα από το σύστημα GPS (Global Positioning System) και το GLONASS (Global Navigation Satellite System) και με ένα επιταχυνσιόμετρο τριών αξόνων. Ο δέκτης παρακολουθεί σε κάθε χρονική στιγμή τουλάχιστον δώδεκα δορυφόρους GPS και GLONASS και βάσει των εφημερίδων τους, που προσδιορίζονται με πολύ μεγάλη ακρίβεια από το εκτεταμένο δίκτυο παρακολούθησης της Διεθνούς Υπηρεσίας GNSS (International GNSS Service), και τις παρατηρήσεις φέροντος κύματος και φάσεων που πραγματοποιεί, μπορεί να προσδιορίζει συνεχώς το τρισδιάστατο διάνυσμα της θέσης του με ακρίβεια  $\pm 1$  cm. Επιπρόσθετα, το επιταχυνσιόμετρο που είναι εγκατεστημένο στο κέντρο μάζας του δορυφόρου μετρά τις μη-βαρυτικές δυνάμεις (όπως η ατμοσφαιρική έλξη, η γήινη ακτινοβολία Albedo και η ηλιακή ακτινοβολία), η επίδραση των οποίων μπορεί να υπολογιστεί εκ των υστέρων ή να αντισταθμιστεί με έναν μηχανισμό ελέγχου και απομάκρυνσης μεταθέσεων και γωνιακών μεταβολών (drag-free and angular-free controls). Ένας τέτοιος δορυφόρος, χωρίς τον μηχανισμό ελέγχου μεταθέσεων ήταν και ο δορυφόρος CHAMP. Με την τεχνική αυτή προσδιορίζονται τα μεγάλη μήκη κύματος του πεδίου βαρύτητας αλλά δεν είναι δυνατή η συλλογή δεδομένων υψηλής διακριτικής ικανότητας (υψηλές συχνότητες), εξαιτίας της ομαλοποίησης του σήματος ακόμη και σε αυτό το πολύ χαμηλό, σε σύγκριση με άλλα δορυφορικά συστήματα, υψόμετρο πτήσης (π.χ., 454 km για τον CHAMP). Έτσι, υπεισέρχεται μια τέταρτη προϋπόθεση, δηλαδή η δυνατότητα εξουδετέρωσης ή μείωσης της ομαλοποίησης του βαρυτικού σήματος λόγω του υψομέτρου πτήσης του δορυφόρου. Η κλασική προσέγγιση σε όλες τις γεωεπιστήμες για την ανάδειξη και εντοπισμό χαρακτηριστικών κάποιου μεγέθους μικρού μήκους κύματος είναι η μέτρηση διαφορών ή βαθμίδων του υπό εξέταση μεγέθους.

Στην τεχνική SST-II δύο δορυφόροι βρίσκονται ουσιαστικά στην ίδια τροχιά και σε απόσταση της τάξης των 100 έως 400 km μεταξύ τους. Αυτό το ιδιότυπο «κυνηγητό» ανάμεσα στους δύο δορυφόρους μεταφράζεται σε αυξομείωση της σχετικής τους θέσης η οποία μετράται με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια. Και σε αυτή την περίπτωση η επίδραση των μη-βαρυτικών δυνάμεων στα δύο οχήματα μπορεί είτε να αντισταθμιστεί είτε να μετρηθεί και να απομακρυνθεί. Η κύρια ποσότητα που ενδιαφέρει στην περίπτωση της τεχνικής SST-II είναι η σχετική απόσταση μεταξύ των δύο σκαφών που ουσιαστικά αποτελεί την απόσταση των κέντρων μάζας τους. Η απόσταση αυτή μετράται από μία σύνδεση μικροκυμάτων, που υπάρχει ανάμεσα στους δύο δορυφόρους, και ταυτόχρονα συλλέγονται μετρήσεις επιταχύνσεων στις τρεις διαστάσεις με τα διαθέσιμα επιταχυνσιόμετρα και παρατηρήσεις υψομέτρου και θέσης από τους δέκτες παρακολούθησης των δορυφόρων GPS και GLONASS. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι δορυφόροι GRACE-FO.

Στην τεχνική SGG την οποία χρησιμοποιούσε ο δορυφόρος GOCE αναφέρεται στην μέτρηση διαφορών επιταχύνσεων και στις τρεις χωρικές διευθύνσεις ανάμεσα στις μάζες ελέγχου και στο σύνολο των επιταχυνσιόμετρων που υπάρχουν μέσα στο σώμα του δορυφόρου. Η παρατήρηση είναι η διαφορά των βαρυτημετρικών επιταχύνσεων στις θέσεις των μαζών ελέγχου μέσα στον δορυφόρο, οι οποίες προέρχονται από όλες τις ελκτικές μάζες της Γης (ορατή τοπογραφία, υποθαλάσσιες τάφροι και όρη, ζώνες διάρρηξης τεκτονικών πλακών, ανομοιογενείς κατανομές κάτω από τη λιθόσφαιρα, κ.λπ.). Οι μετρήσεις ανταποκρίνονται στις βαθμίδες της επιτάχυνσης της βαρύτητας δηλαδή ουσιαστικά στις δεύτερες παραγώγους του δυναμικού έλξης. Οι μη-βαρυτικές επιδράσεις στο διαστημικό όχημα, όπως για παράδειγμα η ώθηση του αέρα, επηρεάζουν με τον ίδιο τρόπο όλα τα επιταχυνσιόμετρα και σε μια ιδεατή κατάσταση απομακρύνονται όταν σχηματίζονται οι διαφορές των επιταχύνσεων. Επειδή οι αποστάσεις ανάμεσα στα επιταχυνσιόμετρα του GOCE και στις μάζες ελέγχου είναι πολύ μικρές επιτυγχάνεται η παρατήρηση πολύ υψηλών (σε σχέση με άλλους δορυφόρους) συχνοτήτων του πεδίου βαρύτητας.

(Βέργος,2011)

## 3.2 Γεωδυναμικά μοντέλα της δορυφορικής αποστολής GOCE

### 3.2.1 Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE ευθείας μεθόδου υπολογισμού DIR

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν από την 1/11/2009 έως 20/10/2013 από το δορυφόρο GOCE. Η εκτίμηση των αρμονικών συντελεστών γίνεται χρησιμοποιώντας τη δυναμική προσέγγιση, δηλαδή, με βάση την ανάλυση των διαταραχών της τροχιάς. Τα δεδομένα παρακολούθησης μέσω δορυφόρου συγκρίνονται με τις προβλεπόμενες από το μοντέλο τιμές που συνάγονται από μια αριθμητικά ενσωματωμένη τροχιά χρησιμοποιώντας εκ των προτέρων βαρυτικά μοντέλα βαρύτητας EIGEN5C και ITG-Grace2010 ως υπόβαθρο και οι εξισώσεις παρατηρήσεις φιλτράρονται με φίλτρο ζώνης και χαμηλοπερατό. Η διαφορά μεταξύ των παρατηρήσεων και των υπολογισμένων από τα μοντέλα ποσοτήτων, δηλαδή των σφαλμάτων, αφομοιώνονται σε μια επαναληπτική συνόρθωση ελάχιστων τετραγώνων (μέθοδος άθροισης κανονικών εξισώσεων).

Τα προϊόντα DIR προκύπτουν από τις άμεσες αριθμητικές λύσεις, σε αντίθεση με τα προϊόντα των χρονικών λύσεων, προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη υφιστάμενη πρότερη γνώση του βαρυτικού πεδίου μέσω ενός μοντέλου αναφοράς για το δυναμικό της βαρύτητας της Γης. Ως εκ τούτου, ενσωματώνουν δεδομένα από άλλες δορυφορικές αποστολές, όπως π.χ. την αποστολή GRACE.

(Sean L. Bruinsma 2013, [http://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime), Καλαμπόγιας, 2012)

### 3.2.2 Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE μεθόδου χωρικής ανάλυσης SPW

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν από την 30/10/2009-20/10/2013 από το δορυφόρο GOCE με τη χρήση ηλεκτροστατικού βαρυτήμετρου που διέθετε.

Το επιταχυνσιόμετρο επιτρέπει, κατ' αρχήν, την άμεση παρατήρηση όλων των μη βαρυτικών δυνάμεων που δρουν στον δορυφόρο, ενώ η ακριβής ανίχνευση της τροχιάς παρέχει, μετά από διπλό διαχωρισμό, το πλήρες διάνυσμα ισχύος που εφαρμόζεται σε αυτό, οπότε η διαφορά των δύο αποδίδει το βαρυτικό μέρος της δύναμης.

Τα προϊόντα SPW από τις χωρικές επιλύσεις κάνουν επιπλέον χρήση και των δορυφορικών δεδομένων παρακολούθησης της τροχιάς του δορυφόρου, δηλαδή των μετρήσεων που προέρχονται από τον δέκτη GPS, καθώς επίσης και από τις διαβαθμίσεις της βαρύτητας που μετρώνται από τα επιταχυνσιόμετρα του ηλεκτροστατικού βαρυτήμετρου.

(Migliaccio Federica 2004, [http://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime), Καλαμπόγιας, 2012)

### 3.2.3 Γεωδυναμικά μοντέλα GOCE μεθόδου φασματικής ανάλυσης TIM

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν από την 9/10/2009-20/10/2013 από το δορυφόρο GOCE. Τα σημεία δεδομένων λαμβάνονται υπόψη από τη θέση τους στο διάστημα, σε ένα πλαίσιο αναφοράς που περιστρέφεται με το στερεό σώμα της Γης. Με αυτόν τον τρόπο τα δεδομένα είναι ένα δείγμα του πεδίου βαρύτητας πάνω από μια γεωκεντρική σφαίρα (πιο συγκεκριμένα ένα λεπτό κέλυφος: η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική). Αυτή η επιλογή έχει το πλεονέκτημα ότι το μεγαλύτερο μέρος του βαρυτικού σήματος που θα καθοριστεί είναι επίσης χωρικά συγκεντρωμένα, αν και υπάρχουν σήματα εξαρτώμενα από το χρόνο λόγω παλίρροιας και άλλων παραμορφώσεων. Σε μια χρονικά εξαρτημένη λύση τα σημεία δεδομένων θεωρούνται ως διακριτές χρονοσειρές. Αυτός είναι ένας λιγότερο φυσικός τρόπος για να δούμε το θετικό μέρος του βαρυτικού σήματος: πράγματι, κάθε σφαιρική αρμονική εμφανίζεται ως ένα άθροισμα σημάτων με διαφορετικές συχνότητες.

Η λύση προέκυψε από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και πιο συγκεκριμένα με τη μέθοδο άθροισης κανονικών εξισώσεων.

Τα προϊόντα TIM από τις χρονικές λύσεις προκύπτουν αποκλειστικά από δεδομένα GOCE, δηλαδή δεν περιέχουν άλλες πληροφορίες για το πεδίο βαρύτητας π.χ. μέσω κάποιου προϋπάρχοντος μοντέλου αναφοράς. Ως εκ τούτου, αυτά είναι αντιπροσωπευτικά των δυνατοτήτων της αποστολής GOCE και αποτελούν ένα ανεξάρτητο μέσο σύγκρισης με άλλα μοντέλα του γήινου δυναμικού.

(R. Klees 2002, [http://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime), Καλαμπόγιας, 2012)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η συνεισφορά των σύγχρονων γεωδυναμικών μοντέλων προερχόμενων από τα δεδομένα του δορυφόρου GOCE στην υψομετρική τεκμηρίωση σημείων αναφοράς. Αποδεικνύεται η βελτίωση στον υπολογισμό της αποχής του γεωειδούς με την ενσωμάτωση των νέων δεδομένων των δορυφορικών αποστολών του πεδίου βαρύτητας. Ειδικότερα, στις χαμηλές και μέσες συχνότητες του φάσματος του πεδίου ( $n < 300$ ), η βελτίωση στην ακρίβεια υπολογισμού των συντελεστών που παρατηρείται είναι σημαντική. Σε συνδυασμό με την υψηλή διακριτική ικανότητα της αποστολής, λόγω του χαμηλού υψομέτρου τροχιάς του δορυφόρου, οδηγούν στη βελτίωση της ομοιογένειας και της ακρίβειας προσδιορισμού της αποχής του γεωειδούς παγκοσμίως κατά τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους, σε σύγκριση με τα αποτελέσματα προηγούμενων αποστολών.

Η υψηλή ακρίβεια και διακριτική ικανότητα των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE αποτελεί ένα ακόμα βήμα στη βελτίωση των μεθόδων της υψομετρίας με GNSS. Τα γεωμετρικά υψόμετρα που προκύπτουν από τις δορυφορικές μετρήσεις συνδυάζονται με τις αποχές του γεωειδούς με σκοπό τον υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων. Η ακρίβεια και η αξιοπιστία του τελικού ορθομετρικού υψομέτρου εξαρτάται από την ακρίβεια των συνδυαζόμενων υψομέτρων, όπως επίσης και από τις μεθόδους συνδυασμού αυτών.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται τρόποι συνδυασμού και αξιολόγησης της υψομετρικής πληροφορίας που παρέχεται από τις δορυφορικές παρατηρήσεις των GNSS και τα σύγχρονα γεωδυναμικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας. Επιπλέον, ελέγχεται η συνεισφορά των δεδομένων του GOCE με την ενσωμάτωση των χαμηλών συχνοτήτων των γεωδυναμικών μοντέλων στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο αναφοράς EGM2008. Η ενσωμάτωση πραγματοποιείται διαδοχικά ανά βαθμό και συμπεράσματα παρουσιάζονται σχετικά με το βέλτιστο βαθμό ενσωμάτωσης των δεδομένων του GOCE στην περιοχή μελέτης. Ο συνδυασμός των βελτιωμένων γεωδυναμικών μοντέλων με τις παρατηρήσεις των GNSS πραγματοποιείται με τη χρήση κατάλληλων παραμετρικών μοντέλων.

Σκοπός είναι να βρεθεί το βέλτιστο γεωδυναμικό μοντέλο σε συνδυασμό με το αντίστοιχο παραμετρικό μοντέλο για την περιοχή μελέτης. Τα κριτήρια βελτιστοποίησης αφορούν στην

αξιολόγηση, τόσο της εσωτερικής, όσο και της εξωτερικής ακρίβειας σημείων αναφοράς, καθώς και τη στατιστική συμπεριφορά των υπολοιπόμενων σφαλμάτων της συνόρθωσης.

#### 4.1 Περιοχή και δεδομένα μελέτης

Ως περιοχή μελέτης επιλέχθηκε ο νομός Αττικής (βλ. Σχήμα 4.1). Στο νομό υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα υψομετρίας από τις εργασίες του ερευνητικού προγράμματος ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ – Ενίσχυση Ερευνητικών Μονάδων στα Πανεπιστήμια και ΤΕΙ (Αρχιμήδης, 2013), τα οποία μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια του προγράμματος (2011 – 2012). Πρόκειται για 102 χωροσταθμικά σημεία αναφοράς (τριγωνομετρικά σημεία του κρατικού δικτύου, χωροσταθμικές αφετηρίες, ιδρυθέντα υψομετρικά σημεία), στα οποία είναι διαθέσιμα α) οι γεωδαιτικές τους συντεταγμένες, β) τα γεωμετρικά υψόμετρα ( $h$ ) και γ) τα ορθομετρικά υψόμετρα ( $H$ ) στο ελληνικό κατακόρυφο σύστημα αναφοράς. Οι γεωδαιτικές συντεταγμένων των σημείων, καθώς και το γεωμετρικό τους υψόμετρο αναφέρονται στο HTRS07 (Γιαννίου, 2008) σε ελεύθερο σύστημα παλίρροιας (tide-free system), εφόσον προέρχονται από δορυφορικές μετρήσεις GNSS και τα ορθομετρικά υψόμετρα του Ελληνικού Κατακόρυφου Συστήματος αναφέρονται σε ένα μέσο σύστημα παλίρροια (mean-tide system). Τα τελευταία έχουν προκύψει από τη χωροσταθμική αφετηρία αναφοράς, δίπλα στον παλιρροιογράφο του Πειραιά, η οποία έχει λάβει υψόμετρα από παρατηρήσεις μέσης στάθμης της θάλασσας για τουλάχιστον 18.6 έτη παρατήρησης (Μυλωνά – Κοτρογιάννη, 1989).

Όλα τα σημεία της μελέτης προέρχονται από το ερευνητικό πρόγραμμα Αρχιμήδης ΙΙΙ και έχουν προκύψει από δορυφορικές παρατηρήσεις GNSS και χωροσταθμικές οδεύσεις (γεωμετρική χωροστάθμιση και ειδική τριγωνομετρική υψομετρία). Οι παρατηρήσεις GNSS πραγματοποιήθηκαν με ελάχιστη διάρκεια παρατήρησης τα 60 λεπτά, διάστημα καταγραφής (logging interval) ανά 15 sec. Επίσης, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διαδικασία των μετρήσεων, ώστε το 90% της συνολικής διάρκειας των μετρήσεων σε ένα σημείο να αποτελείται από ταυτόχρονες παρατηρήσεις σε τουλάχιστον 6 δορυφόρους. Επιπλέον, ο δείκτης PDOP διατηρήθηκε  $\leq 4$ , τουλάχιστον για τα  $\frac{3}{4}$  της συνολικής διάρκειας των παρατηρήσεων. Η γωνία αποκοπής (elevation mask) των δορυφόρων για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της τροποσφαιρικής υστέρησης επιλέχθηκε στις  $10^\circ$ . Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν δύο γεωδαιτικοί δέκτες δύο συχνοτήτων GNSS της κατασκευάστριας εταιρίας TOPCON (HIPER-PRO) και τα χειριστήρια TOPCON FC-100 που



συνοδεύουν τους δέκτες. Για την εύρεση του ορθομετρικού υψομέτρου χρησιμοποιήθηκαν τρεις μέθοδοι, αυτή της γεωμετρικής χωροστάθμησης (αποστάσεις μέχρι 1km), η μέθοδος της Τριγωνομετρικής Υψομετρίας και αυτή της Ειδικής Τριγωνομετρικής Υψομετρίας (αποστάσεις μεγαλύτερες του 1km, με μεγάλη κλίση εδάφους ή φυσικά και τεχνητά εμπόδια). Τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν των κατασκευαστριών εταιριών Leica, Topcon και της Geomax. Περισσότερα για τις προδιαγραφές, τη διαδικασία και την επιλογή των σημείων των μετρήσεων παρουσιάζονται στην Τεχνική Αναφορά του έργου.

(ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ, 2013)



**Σχήμα 4.1** Περιοχή μελέτης. ( Google Earth)

Η διαδικασία ελέγχου και αξιολόγησης πραγματοποιείται σε τρία μέρη

1. Εύρεση κατάλληλου παραμετρικού μοντέλου

Επιλέγονται γνωστά παραμετρικά μοντέλα και εκτιμώνται οι συντελεστές τους. Τα παραμετρικά μοντέλα χρησιμοποιούνται στο συνδυασμό των υψομετρικών δεδομένων από τα σημεία GNSS/χωροστάθμησης και του γεωδυναμικού μοντέλου EGM2008. Με το πρώτο βήμα αυτό, ελέγχεται η καταλληλότητα των παραμετρικών μοντέλων που θα χρησιμοποιηθούν στον έλεγχο της ενσωμάτωσης των δεδομένων

του GOCE. Αξιολογείται επιπλέον η παρεχόμενη από τις μετρήσεις υψομετρική πληροφορία και απομακρύνονται τυχόν χονδροειδή σφάλματα στα ορθομετρικά υψόμετρα.

Αποτέλεσμα του πρώτου ελέγχου είναι η επιλογή του καταλληλότερου παραμετρικού μοντέλου συνδυασμού, βάσει συγκεκριμένων στατιστικών κριτηρίων, ώστε να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια στην ενσωμάτωση των δεδομένων του GOCE στις τιμές της αποχής του γεωειδούς.

## 2. Εύρεση κατάλληλου γεωδυναμικού μοντέλου

Το δεύτερο στάδιο ελέγχου είναι και το σημαντικότερο αντικείμενο της μελέτης. Ερευνάται η τμηματική ενσωμάτωση των δεδομένων των γεωδυναμικών μοντέλων του δορυφόρου GOCE στο βασικό μοντέλο αναφοράς EGM2008. Η επιλογή του παραμετρικού μοντέλου συνδυασμού του προηγούμενου βήματος οδηγεί στο βέλτιστο συνδυασμό της υψομετρικής πληροφορίας. Επιλέγεται ο καταλληλότερος βαθμός ενσωμάτωσης των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE στις διαφορετικές εκδόσεις τους και μεθόδους υπολογισμού. Χρησιμοποιούνται τα μοντέλα του GOCE, τα οποία είναι αποτέλεσμα των επεξεργασιών των δεδομένων του μέσω της ευθείας μεθόδου υπολογισμού (direct method – DIR-models), της μεθόδου ανάλυσης στο χώρο των συχνοτήτων (time-wise method, TIM-models), καθώς και της μεθόδου της χωρικής ανάλυσης (space-wise method, SPW-models). Δοκιμάζονται οι εκδόσεις 1 έως και 6 των γεωδυναμικών μοντέλων και επιλέγεται με κατάλληλα κριτήρια ο βέλτιστος βαθμός ενσωμάτωσης των μοντέλων. Τελικά, επιλέγεται το καλύτερα προσαρμοζόμενο εμπλουτισμένο μοντέλο για τα δεδομένα της περιοχής μελέτης.

## 3. Εύρεση τελικής ακρίβειας προσέγγισης υψομέτρων

Η επιλογή του κατάλληλου παραμετρικού μοντέλου συνδυασμού και του βέλτιστου βαθμού ενσωμάτωσης των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE στο EGM2008 οδηγεί και στο τελικό στάδιο ελέγχου της μελέτης. Αξιολογείται η εκτίμηση της υψομετρικής πληροφορίας με το συνδυασμό δορυφορικών, επίγειων και δυναμικών μετρήσεων, τόσο εσωτερικά, ως εκτίμησης της εσωτερικής ακρίβειας του αλγορίθμου συνδυασμού, όσο και εξωτερικά με την εκτίμηση τιμών υψομέτρων σε σημεία ελέγχου που δε συμμετέχουν στη διαδικασία συνδυασμού. Τα τελικά συμπεράσματα βασίζονται σε αυστηρά στατιστικά κριτήρια και παρουσιάζουν μία εικόνα για την δυνατότητα χρήσης της τεχνολογίας του GNSS στην εκτίμηση υψομέτρων ακριβείας, καθώς και τους περιορισμούς της μεθόδου αυτής. Προτείνονται επίσης τρόποι



βελτίωσης της διαδικασίας εκτίμησης υψομέτρων ακριβείας, καθώς και στοιχεία μελλοντικής έρευνας πάνω στο πεδίο της υψομετρίας με GNSS.

#### 4.2 Αξιολόγηση υψομετρικής πληροφορίας μέσω παραμετρικών μοντέλων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα ορθομετρικά υψόμετρα του Ελληνικού Κατακόρυφου Δικτύου αναφέρονται σε ένα μέσο σύστημα παλίρροιας (mean-tide system), αφού η Μέση Στάθμη της Θάλασσας (ΜΣΘ), η οποία χρησιμοποιείται ως προσέγγιση του γεωειδούς στην περιοχή, έχει προκύψει από μετρήσεις 18.6 ετών και περιλαμβάνει όλες τις παλιρροϊκές επιδράσεις της Σελήνης και του Ηλίου. Για την αξιολόγηση των παραμετρικών μοντέλων απαραίτητη κρίνεται η μετατροπή των υψομετρικών πληροφοριών σε ένα ενιαίο σύστημα παλίρροιας (Ekman, 1989). Για την παρούσα μελέτη επιλέχθηκε το απαλλαγμένο από τις επιδράσεις των παλιρροιών στο δυναμικό γεωειδές (tide-free geoid). Μετατρέπονται τα ορθομετρικά υψόμετρα από mean tide system σε tide-free system μέσω του τύπου (Ekman, 1989).

$$H_{TF} = [(1 + k)(9,9 - 29,6\sin^2\varphi)/100 + H_{MT}] \quad [m] \quad (4.1)$$

όπου  $k=0,30$

Τα στατιστικά των ορθομετρικών υψομέτρων στο μέσο σύστημα παλίρροιας και των τελικών υψομέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στις συγκρίσεις και αναφέρονται στο απαλλαγμένο από τις παλιρροϊκές επιδράσεις στο δυναμικό σύστημα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1

**Πίνακας 4.1** Στατιστικά των υψομέτρων  $H_{MT}$  και  $H_{TF}$  (m)

Είδος Υψομέτρου	Max	Min	sd
$H_{MT}$	647,075	1,776	12,286
$H_{TF}$	646,977	1,679	12,285

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η αποχή του γεωειδούς από το γεωδυναμικό μοντέλο βαρύτητας EGM2008 με μέγιστο βαθμό 2190. Για τον υπολογισμό των αποχών του γεωειδούς, τόσο του μοντέλου αναφοράς EGM2008, όσο και των διαφορετικών βαθμών ανάπτυξης των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE χρησιμοποιήθηκε η εφαρμογή του Διεθνούς Κέντρου των Γεωδυναμικών Μοντέλων της Γης (International Center of Geopotential Earth Models –

ICGEM – <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>). Η διαδικασία διακρίνεται σε επτά βήματα επιλογής, όπως φαίνονται στον Σχήμα 4.2:

1. Επιλογή γεωδυναμικού μοντέλου
2. Επιλογή του συναρτησιακού του πεδίου βαρύτητας (στην περίπτωση μας γεωειδές)
3. Επιλογή του συστήματος παλίρροιας (tide free)
4. Επιλογή του μέγιστου βαθμού ανάπτυξης
5. Εισαγωγή των γεωδαιτικών τους συντεταγμένων των σημείων υπολογισμού
6. Επιλογή βήματος καννάβου (σε νεότερη έκδοση δέχεται απευθείας τα σημεία υπολογισμού)
7. Εκτέλεση υπολογισμού

The screenshot shows the ICGEM website interface for calculating the EGM2008 geoid. The interface is divided into several sections:

- Model selection:** A dropdown menu is set to "Longtime Model". A list of models is shown, with "EGM2008" highlighted by a red circle and the number 1.
- Functional selection:** A dropdown menu is set to "height\_anomaly", highlighted by a red circle and the number 2. A text box explains that the geoid is approximated by the height anomaly plus a topography dependent correction term.
- Grid selection:** A world map is shown, highlighted by a red circle and the number 3. Below it, a "Grid Step [']" field is set to "0.00000001" and a "Height over Ellipsoid [m]" field is set to "0", both highlighted by red circles and the number 4.
- Reference System:** A dropdown menu is set to "WGS84", highlighted by a red circle and the number 5. Other fields include "Radius: 6378137.0", "Flat: 298.257223563", "Gm: 3.986004418e+14", and "Omega: 7.292115e-5".
- Tide System:** A dropdown menu is set to "tide free", highlighted by a red circle and the number 5. A checkbox for "Zero Degree Term" is checked.
- Gaussian Filter:** A dropdown menu is set to "None", highlighted by a red circle and the number 5. A "Filter Length: 1.0 [Degree]" field is also highlighted by a red circle and the number 5. A graph shows the "Impulse Response R(x)" and "Definitions of the Filterlength  $\Phi$ ".
- Low-pass filtering:** "Start Gentle Cut: 2190" and "Maximum Degree: 2190" fields are highlighted by red circles and the number 6.
- start computation:** A blue button labeled "start computation" is highlighted by a red circle and the number 7.

Σχήμα 4.2 Διαδικασία υπολογισμού γεωειδούς EGM2008

Υπολογίζεται η αποχή του γεωειδούς από τις μετρήσεις GPS και τα ορθομετρικά υψόμετρα

$$N_{GPS} = h - H_{TF} \quad (4.2)$$

Σημειώνεται ότι τα γεωμετρικά υψόμετρα  $h$  υπολογίζονται από το δορυφορικό σύστημα και δεν περιέχουν καμία πληροφορία για το δυναμικό της παλίρροιας. Αναφέρονται λοιπόν στο απαλλαγμένο από τις επιδράσεις της παλίρροιας του δυναμικού σύστημα (tide-free), αφού περιέχουν μόνο τις μετακινήσεις των σημείων από την επίδραση της παλίρροιας και όχι την μεταβολή στις ισοδυναμικές από την παραπάνω επίδραση.

Ακολούθως, υπολογίζεται το  $\Delta N$  αφαιρώντας την από την αποχή γεωειδούς NGPS από την αποχή γεωειδούς NEGM2008

Τα στατιστικά των παραπάνω υπολογισμών παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2

**Πίνακας 4.2** Στατιστικά των NGPS, NEGM2008 και  $\Delta N(m)$

	max	min	sd
$N_{GPS}$	39,242	39,898	0,803
$N_{EGM2008}$	36,309	37,054	0,767
$\Delta N$	0,318	-2,159	0,490

Για το πρώτο στάδιο της υψομετρικής αξιολόγησης χρησιμοποιήθηκαν έξι παραμετρικά μοντέλα της μορφής (Andritsanos et al., 2015):

$$1: a_i^T x = x_0 + x_1 \cos \varphi_i \cos \lambda_i + x_2 \cos \varphi_i \sin \lambda_i + x_3 \sin \varphi_i \quad (4.3)$$

$$2: a_i^T x = x_0 + x_1 \cos \varphi_i \cos \lambda_i + x_2 \cos \varphi_i \sin \lambda_i + x_3 \sin \varphi_i + x_4 \sin^2 \varphi_i \quad (4.4)$$

$$3: a_i^T x = \mu + \delta_{SH} H_i + \delta_{SN} N_i \quad (4.5)$$

$$4: a_i^T x = \mu + \delta_{SH} H_i \quad (4.6)$$

$$5: a_i^T x = \mu + \delta_{SN} N_i \quad (4.7)$$

$$6: a_i^T x = \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 x_{(3m+n)} (\varphi_i - \varphi_0)^n (\lambda_i - \lambda_0)^m \cos^m \varphi_i \quad (4.8)$$

Όπου  $\varphi_i$  και  $\lambda_i$  γεωδαιτικές συντεταγμένες των σημείων,  $H_i$  τα ορθομετρικά υψόμετρα στο απαλλαγμένο από τις επιδράσεις της παλίρροιας σύστημα (tide-free system) ( $H_{TF}$ ),  $N_i$  η αποχές του γεωειδούς EGM2008.

Το γενικό μοντέλο του μετασχηματισμού δίνεται από την εξίσωση (Fotopoulos\_1.,2003):

$$\Delta N_i = h_i - H_i - N_i = a_i^T x + v_i \quad (4.9)$$

όπου  $v_i$  τα σφάλματα των παρατηρήσεων των  $\Delta N$ .

Οι παράμετροι  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \mu, \delta_{SH}, \delta_{SN}$  είναι οι άγνωστοι παράμετροι ( $\chi$ ) όπου υπολογίζονται με τη μέθοδο εξισώσεων παρατηρήσεων (Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων) μέσω του λογισμικού Matlab.

Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων καθώς και η τελική λύση της συνόρθωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$N = A^T P A \rightarrow u = A^T P b \rightarrow \hat{x} = N^{-1} u \quad (4.10)$$

όπου καταρχήν θεωρείται ότι ο πίνακας  $P$  είναι μοναδιαίος και για αυτό δεν λαμβάνεται υπόψη. Για τον υπολογισμό της ακρίβειας των εκτιμήσιμων παραμέτρων, καθώς και για τη στατιστική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης, υπολογίζεται στο Matlab το διάλυσμα των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων και η εκτίμηση της εκ των υστέρων (a-posteriori) μεταβλητότητας αναφοράς σύμφωνα με:

$$\hat{v} = b - A x \quad \text{και} \quad (4.11)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T \hat{v}}{n-m} \quad (4.12)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των παρατηρήσεων και  $m$  ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων προς εκτίμηση.

Στην συνέχεια, υπολογίζεται ο πίνακας των εκτιμήσεων των (συμ)μεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων:

$$\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}^2 (P^{-1} - AN^{-1} A^T) \quad (4.13)$$

Για το στατιστικό έλεγχο των παρατηρήσεων χρησιμοποιείται η σάρωση δεδομένων (data snooping). Υπολογίζεται το εσωτερικά ( $r_i$ ) και εξωτερικά ( $t_i$ ) ομαλοποιημένο σφάλμα για κάθε παρατήρηση, χρησιμοποιώντας τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\hat{C}_{\hat{v}}$  σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$r_i^2 = \frac{\hat{v}_i^2}{\hat{\sigma}_i^2(\hat{v}_i)} \quad \text{και} \quad (4.14)$$

$$t_i = r_i \sqrt{\frac{f-1}{f-r_i^2}} \quad (4.15)$$

όπου  $\hat{\sigma}_i^2$  ( $\hat{\nu}_i$ ) το  $i$  διαγώνιο στοιχείο του πίνακα (συμ)μεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων  $\hat{C}_{\hat{\nu}}$  και  $f$  οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος.

Εκτελείται ο στατιστικός έλεγχος  $t$  (student) υπολογίζοντας τα εξωτερικά και εσωτερικά ομαλοποιημένα σφάλματα  $r_i$  και  $t_i$ . Οι παρατηρήσεις με  $t_i$  μεγαλύτερο από το όριο  $3.5209 t_{f-1}^{\alpha/2}$  απομακρύνονται για επίπεδο σημαντικότητας ελέγχου  $\alpha=0.001$ . Οι παρατηρήσεις 53,94 και 101 ξεπέρασαν το όριο και απομακρύνθηκαν από το δείγμα των μετρήσεων. Αν και ο σωστότερος στατιστικός θα ήταν η απομάκρυνση μία προς μία διαδοχικά των προβληματικών παρατηρήσεων και ο επαναλαμβανόμενος έλεγχος Student, επιλέχθηκε η απευθείας απομάκρυνση των τριών παρατηρήσεων από τις συνολικές 102, λόγω των υψηλών βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Επιπλέον, στο σύνολο των παραμετρικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν εντοπίστηκαν οι συγκεκριμένες παρατηρήσεις, επομένως ο έλεγχος επαληθεύτηκε, ανεξαρτήτως του χρησιμοποιούμενου παραμετρικού μοντέλου. Ο τελικός έλεγχος των υπολειπόμενων παρατηρήσεων δεν παρουσίασε κάποιο πρόβλημα και επομένως οριστικοποιήθηκε το δείγμα των μετρήσεων που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια των ελέγχων.

Στη συνέχεια, εξετάστηκε στατιστικά η καταλληλότητα κάθε παραμετρικού μοντέλου. Χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις τρόποι ελέγχου: α) η εμπειρική μέθοδος, β) ο έλεγχος της εξωτερικής ακρίβειας, γ) ο παραμετρικός βαθμός των μοντέλων και δ) η σημαντικότητα των συντελεστών των παραμετρικών μοντέλων.

1. **Εμπειρική μέθοδος.** Για τα 99 σημεία( εκτός των 94, 101 και 53, τα οποία αφαιρέθηκαν κατά τη διαδικασία της σάρωσης δεδομένων) υπολογίζονται τα στατιστικά του διανύσματος των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων  $\hat{\nu}$  για κάθε εξεταζόμενο παραμετρικό μοντέλο(min,max,sd).

**Πίνακας 4.3** Στατιστικά του εσωτερικού ελέγχου των παραμετρικών μοντέλων (m)

Μοντέλο	max	min	sd
1	0,354	-0,208	0,286
2	-1,349	0,057	0,286
3	0,280	-0,220	0,279
4	0,180	-0,211	0,276
5	0,274	-0,223	0,280
6	0,248	-0,237	0,280

Από τη μελέτη του Πίνακα 4.3, παρατηρείται ότι το μοντέλο υπ' αρ. 4 παρουσιάζει τη μικρότερη τιμή της τυπικής απόκλισης των σφαλμάτων, καθώς και του εύρους των σφαλμάτων. Πρέπει να τονιστεί ότι το σύνολο των παραμετρικών μοντέλων έχει παρόμοια στατιστικά χαρακτηριστικά, εκτός από των εύρος των σφαλμάτων του 2<sup>ου</sup> μοντέλου.

2. **Έλεγχος εξωτερικής ακρίβειας.** Από τα 99 σημεία αφαιρούνται 15 σημεία με τυχαία κατανομή και εφαρμόζεται η μέθοδος εξισώσεων παρατηρήσεων για κάθε μοντέλο. Με τις εκτιμήσεις των συντελεστών των αγνώστων υπολογίζονται τα ορθομετρικά υψόμετρα των 15 σημείων που έχουν αφαιρεθεί σύμφωνα με τη σχέση:

$$\hat{H}_i = h_{ii} - N_{EGM2008i} - a_i^T \hat{x} \quad (4.16)$$

και υπολογίζονται οι διαφορές από τα γνωστά ορθομετρικά υψόμετρα. Τέλος υπολογίζονται τα στατιστικά των διαφορών στα 15 επιλεγμένα σημεία ελέγχου.

**Πίνακας 4.4** Στατιστικά του εξωτερικού ελέγχου των παραμετρικών μοντέλων (m)

Μοντέλο	max	min	sd
1	0,061	-0,148	0,251
2	0,113	-0,073	0,235
3	0,179	-0,006	0,224
4	0,068	-0,118	0,219
5	-0,026	-0,215	0,223
6	0,074	-0,101	0,234

Παρατηρείται και εδώ η επικράτηση του 4<sup>ου</sup> μοντέλου σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα του ελέγχου. Παρουσιάζει την καλύτερη τυπική απόκλιση των διαφορών σε σύγκριση με τις αντίστοιχες διαφορές των άλλων μοντέλων. Επιβεβαιώνεται, λοιπόν, και με την εφαρμογή ενός ανεξάρτητου εξωτερικού ελέγχου η καλύτερη στατιστική συμπεριφορά του 4<sup>ου</sup> παραμετρικού μοντέλου.

3. **Εξέταση του παραμετρικού βαθμού.** Από τα 99 σημεία εκτελείται η μέθοδος εξισώσεων παρατηρήσεων για κάθε μοντέλο. Εξετάζονται οι συντελεστές  $R^2$  και  $R_a^2$ , αφού προηγουμένως έχει υπολογιστεί για κάθε παραμετρικό μοντέλο το  $a_i^T x$  αντικαθιστώντας τις τιμές των άγνωστων παραμέτρων που έχουν βρεθεί από την επίλυση ΜΕΤ.

Στη συνέχεια υπολογίζεται για κάθε σημείο η εκτίμηση του σφάλματος της κάθε παρατήρησης.

$$\hat{v}_i = h - H_{TF} - N_{EGM2008} - a_i^T x \quad (4.17)$$

Στη συνέχεια για κάθε σημείο υπολογίζεται το  $l_i = h - H_{TF} - N_{EGM2008}$ ,

το τετράγωνο της διαφοράς  $l_i - \hat{v}_i$  και το τετράγωνο της διαφοράς

$l_i - l_{\text{μέσος όρος}}$ .

Υπολογίζεται ο συντελεστής:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (l_i - \hat{v}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (l_i - l_{\text{μέσος όρος}})^2} \quad (4.18)$$

με την τιμή του να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1. Όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι η τιμή του  $R^2$ , τόσο καλύτερα στο συγκεκριμένο δείγμα δεδομένων προσαρμόζεται το παραμετρικό μοντέλο που ελέγχεται.

Οι υπολογιζόμενες τιμές του  $R^2$  για κάθε παραμετρικό μοντέλο παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5.

**Πίνακας 4.5** Τιμές του  $R^2$  των μοντέλων

Μοντέλο	$R^2$
1	0,985818
2	0,986053
3	0,986218
4	0,991152
5	0,986218
6	0,986214



Τέλος υπολογίζεται το  $R_a^2$ , όπου η τιμή κυμαίνεται από 0 έως 1 και όσο η προκύπτουσα τιμή είναι κοντά στο 1, τόσο ταιριάζει καλύτερα το παραμετρικό μοντέλο. Ο συντελεστής  $R_a^2$  λαμβάνει υπόψη και τον αριθμό των αγνώστων παραμέτρων, ώστε τα μοντέλα που εξετάζονται να μπορούν να συγκριθούν άμεσα.

$$R_a^2 = 1 - \frac{(m-1)}{(m-u)} (1 - R^2) \quad (4.19)$$

Όπου m είναι ο αριθμός των σημείων και u ο αριθμός των παραμέτρων κάθε μοντέλου (4 για το πρώτο, 5 για το δεύτερο, 3 για το τρίτο, 2 για το τέταρτο, 2 για το πέμπτο, 6 για το έκτο).

Οι τιμές του συντελεστή  $R_a^2$  που υπολογίστηκε για κάθε παραμετρικό μοντέλο της μελέτης παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.6

**Πίνακας 4.6** Τιμές του  $R_a^2$  των μοντέλων

Μοντέλο	$R_a^2$
1	0,985374
2	0,985466
3	0,985934
4	0,991062
5	0,986078
6	0,985481

Από τη μελέτη των Πινάκων 4.5 και 4.6 γίνεται αντιληπτή η επικράτηση του 4<sup>ου</sup> μοντέλου στην ανάλυση του συγκεκριμένου δείγματος μετρήσεων.

4. **Έλεγχος σημαντικότητας συντελεστών μοντέλων:** Πραγματοποιείται η στατιστική αξιολόγηση(έλεγχος σημαντικότητας συντελεστών) βάσει της κατανομή F.

Ένα από τα βασικά ζητήματα στην επιλογή ενός παραμετρικού μοντέλου είναι η αποφυγή υπερπαραμετροποίησης. Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο σκέψης είναι η αρχή της οικονομίας που αναφέρεται συνήθως στη στατιστική βιβλιογραφία, όπου δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται περισσότεροι όροι, πέρα από αυτές που είναι απαραίτητες, για να εξηγήσουν τα πάντα. Σε αυτήν την περίπτωση, για χάρη απλουστεύσεως, υπολογιστικής απόδοσης και αποφυγή των επιπτώσεων της υπερπαραμετροποίησης, πρέπει να δοκιμάζεται η σημασία κάθε παραμέτρου στο επιλεγμένο μοντέλο. Περιττοί όροι ενδέχεται να επηρεάζουν άλλους παραμέτρους στο μοντέλο, οι οποίες θα εμποδίσουν την ικανότητα αξιολόγησης απόδοσης του μοντέλου. Επομένως, η κύρια εστίαση αυτής της ενότητας είναι να αναπτυχθεί μια διαδικασία για τη δοκιμή, τον εντοπισμό και την εξάλειψη των περιττών όρων που πρέπει να σχηματιστούν ένα πιο απλοποιημένο μοντέλο τάσης. Λόγω του αριθμού των δυνατοτήτων και των υπολογιστικών προσπαθειών που εμπλέκεται σε μια τέτοια εργασία, καθορίστηκε ότι μια αυτοματοποιημένη διαδικασία για τη δοκιμή της σημασίας της παραμέτρου θα είναι το ζητούμενο. Σε γενικές γραμμές, υπάρχουν τρία συστήματα που μπορούν να είναι εφαρμόζεται, δηλαδή α)backward elimination β) forward selection and γ)stepwise procedure. Στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιείται η backward elimination, όπου εφαρμόζεται στα έξι παραμετρικά μοντέλα και σε τρία στάδια(δεύτερο-πρώτο, τρίτο-τέταρτο και πέμπτο, έκτο)

Αρχικά υπολογίζεται η τιμή  $F_{k,f}^{\alpha}$  για  $\alpha=0,05$  και  $\alpha=0,01$  ως εξής:

- Για  $f=60$   $F_{k,f}^{\alpha}=4,00$  και για  $f=120$   $F_{k,f}^{\alpha}=3,92$  όπου η διαφορά τους είναι  $-0,08$   
Άρα  $60 \rightarrow 0,08$   
 $39 \rightarrow \chi$   
 $\chi=,08*39/60=-0,052$   
Τελικά  $F_{k,f}^{\alpha}=4,00+-0,052=3,948$
- Για  $f=60$   $F_{k,f}^{\alpha}=7,08$  και για  $f=120$   $F_{k,f}^{\alpha}=6,85$  όπου η διαφορά τους είναι  $-0,23$   
Άρα  $60 \rightarrow 0,23$   
 $39 \rightarrow \chi$   
 $\chi=-0,23*39/60=-0,1495$   
Τελικά  $F_{k,f}^{\alpha}=7,08 +-0,1495=6,9305$

Στη συνέχεια εξετάζεται η σημαντικότητα των συντελεστών για κάθε μοντέλο, όπου προκύπτει ποιοι συντελεστές παραμένουν και αφαιρούνται. Η σημαντικότητα προκύπτει με βάση την μηδενικής υπόθεση ( $H_0$ ) και την εναλλακτικής υπόθεση ( $H_a$ ). Στην περίπτωση της μηδενικής υπόθεσης η τιμή του  $\tilde{F} \leq F_{k,f}^a$ , το οποίο σημαίνει ότι οι εξεταζόμενοι συντελεστές αφαιρούνται από το μοντέλο. Στην περίπτωση της εναλλακτικής υπόθεσης η τιμή του ( $\tilde{F} > F_{k,f}^a$ ), το οποίο σημαίνει ότι οι εξεταζόμενοι συντελεστές παραμένουν στο μοντέλο.

Η τιμή του  $\tilde{F}$  προκύπτει από τη σχέση

$$\tilde{F} = \frac{x_i^T Q_{x_i}^{-1} x_i}{k \sigma^2} \quad (4.20)$$

όπου  $x_i$  είναι η εκτίμηση του συντελεστή (συνόρθωση με τα "σωστά" 99 σημεία. Το  $Q_{x_i}^{-1}$  είναι το αντίστροφο στοιχείο του πίνακα N που αφορά στον άγνωστο  $x_i$ . Ο k είναι ο αριθμός των παραμέτρων που εξετάζονται (στη συγκεκριμένη περίπτωση 1) και  $\hat{\sigma}^2$  είναι η εκ των υστέρων μεταβλητότητα της λύσης του κάθε μοντέλου.

Η διαδικασία πραγματοποιείται σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο εξετάζεται το δεύτερο μοντέλο και το πρώτο, στο δεύτερο εξετάζεται το 3 μοντέλο και το 4 και 5 και στο τρίτο εξετάζεται το 6 μοντέλο.

Οι υπολογιζόμενες τιμές του  $\tilde{F}$  για κάθε παραμετρικό μοντέλο παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.7.

**Πίνακας 4.7** Υπολογιζόμενες τιμές του  $\tilde{F}$

1 <sup>ο</sup> Στάδιο						2 <sup>ο</sup> Στάδιο		
2 Μοντέλο			1 Μοντέλο			3 Μοντέλο		
Συντελεστές	$Fk, fa$	$\tilde{F}$	Συντελεστές	$Fk, fa$	$\tilde{F}$	Συντελεστές	$Fk, fa$	$\tilde{F}$
5	3,948 & 6,9305	4,150367398	4	3,948 & 6,9305	5,9963226	3	3,948 & 6,9305	1,47298485
4	3,948 & 6,9305	5,480286495	3	3,948 & 6,9305	5,103986253	<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>8,14894728</b>
3	3,948 & 6,9305	2,150798359	<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>6,947295675</b>	<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>8,122856592</b>
<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>6,990287749</b>	<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>6,985811331</b>	—		
<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>6,956058774</b>	—			—		
2 <sup>ο</sup> Στάδιο						3 <sup>ο</sup> Στάδιο		
4 Μοντέλο			5 Μοντέλο			6 Μοντέλο		
Συντελεστές	$Fk, fa$	$\tilde{F}$	Συντελεστές	$Fk, fa$	$\tilde{F}$		$Fk, fa$	$\tilde{F}$
<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>9,672947285</b>	<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>11,36382948</b>	6	3,948 & 6,9305	2,896568496
<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>11,673849173</b>	<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>9,684936582</b>	5	3,948 & 6,9305	3,916753869
—						4	3,948 & 6,9305	4,958359371
—						3	3,948 & 6,9305	5,264839275
—						<b>2</b>	3,948 & 6,9305	<b>11,83395848</b>
—						<b>1</b>	3,948 & 6,9305	<b>9,142648972</b>

Με τη ολοκλήρωση και των τριών σταδίων προκύπτει ότι οι δύο συντελεστές είναι σημαντικοί.

Με βάση τους τέσσερις ελέγχους που πραγματοποιήθηκαν το 4 μοντέλο ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα, όπου τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.8

**Πίνακας 4.8** Συγκεντρωτικά αποτελέσματα 4 μοντέλου

Μοντέλο		max(m)	min(m)	sd(m)	$R^2$	$R_a^2$	Αριθμός παραμέτρων στατιστικής αξιολόγησης	Μοντέλο
4	πριν	0,180	-0,211&	0,276	0,991152	0,991062	2	4
	μετά	0,068	-0,118	0,219				

### 4.3 Αξιολόγηση συνεισφοράς των χαμηλών αρμονικών των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE

Στην παρούσα ενότητα αναλύεται και επιβεβαιώνεται η συνεισφορά των χαμηλών αρμονικών των γεωδυναμικών μοντέλων που προέκυψαν από την επεξεργασία των δεδομένων του δορυφόρου GOCE. Για πρώτη φορά, η μέθοδος της δορυφορικής βαθμιδομετρίας χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση του πεδίου βαρύτητας. Λόγω της εξασθένησης του σήματος της βαρύτητας στο υψόμετρο πτήσης των δορυφορικών αποστολών, οι ανακτώμενες συχνότητες του σήματος παρέμεναν σε χαμηλά επίπεδο ( $n = 120 - 140$ ) μέχρι την έλευση του GOCE. Με την εφαρμογή της βαθμιδομετρίας στις δορυφορικές αποστολές, τόσο η ακρίβεια, όσο και η διακριτική ικανότητα των τελικών προϊόντων αυξήθηκε. Πλέον, οι ανακτώμενες συχνότητες των γεωδυναμικών μοντέλων από τον GOCE μπορούν να φτιάσουν το βαθμό 300, ενώ η ακρίβεια, ιδιαίτερα των συντελεστών χαμηλού βαθμού, μεταφράζεται σε ακρίβεια περίπου 1 cm στην υπολογιζόμενη αποχή του γεωειδούς.

Η εκτίμηση της ακρίβειας στην αποχή του γεωειδούς καθιστά τα δεδομένα του GOCE κατάλληλα για τον έλεγχο και την αξιολόγηση υψομετρικής πληροφορίας σε περιοχές ενδιαφέροντος, όπως επίσης και για την ίδρυση και την αποτελεσματική ενοποίηση κατακόρυφων συστημάτων αναφοράς. Ιδιαίτερα στην Ελλάδα, με τον προβληματικό χαρακτήρα του Ελληνικού κατακόρυφου δικτύου αναφοράς, λόγω των διαφορετικών αφετηριών και σταθμών (π.χ., παλιρροιογράφοι Πειραιά, Ηρακλείου, τοπικοί παλιρροιογράφοι) κρίνεται απαραίτητη η ενσωμάτωση των δεδομένων σε υπάρχοντα γεωδυναμικά μοντέλα υψηλής ανάπτυξης με σκοπό τη βελτίωση των χαμηλών συχνοτήτων των μοντέλων αυτών.

Στο πλαίσιο των παραπάνω, διερευνήθηκε η συνεισφορά των έξι πρώτων εκδόσεων των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE, η ανάπτυξη των οποίων στηρίζεται σε τρεις διαφορετικές μεθόδους: την ευθεία μέθοδο (direct method – DIR models), την μέθοδο επεξεργασίας στη χρονική κλίμακα (time-wise method – TIM models) και τη μέθοδο επεξεργασίας στη κλίμακα του χώρου (space-wise method – SPW models). Οι τρεις μέθοδοι επεξεργασίας, όπως επίσης και τα γεωδυναμικά μοντέλα που προκύπτουν από αυτές περιγράφονται στην ενότητα 3.2.

Η συνεισφορά μελετήθηκε με τον εμπλουτισμό του βασικού γεωδυναμικού μοντέλου αναφοράς EGM2008 (Pavlis et al., 2008). Το μοντέλο EGM2008 χρησιμοποιήθηκε ως αρχικό μοντέλο για τον υπολογισμό της αποχής του γεωειδούς στα 99 σημεία ελέγχου της περιοχής της Αττικής. Το μοντέλο αναπτύχθηκε στο μέγιστο βαθμό 2190 και τάξη 2160 και υπολογίστηκε η συνεισφορά του στη διαφορά των αποχών σύμφωνα με την εξίσωση:

$$N_{GGM} = N_{n=2...330}^{COCE} + (N_{n=2...330}^{EGM2008} - N_{2...330}^{EGM2008}) \quad (4.21)$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα στατιστικά των διαφορών (εύρος τιμών = μέγιστη – ελάχιστη τιμή, μέση τιμή και τυπική απόκλιση) του αρχικού μοντέλου EGM2008 και των εμπλουτισμένων μοντέλων, σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\Delta N = h - H - N^{EGM2008} - N_{terrain} \quad (4.22)$$

$$\Delta N = h - H - N^{GGM} - N_{terrain} \quad (4.23)$$

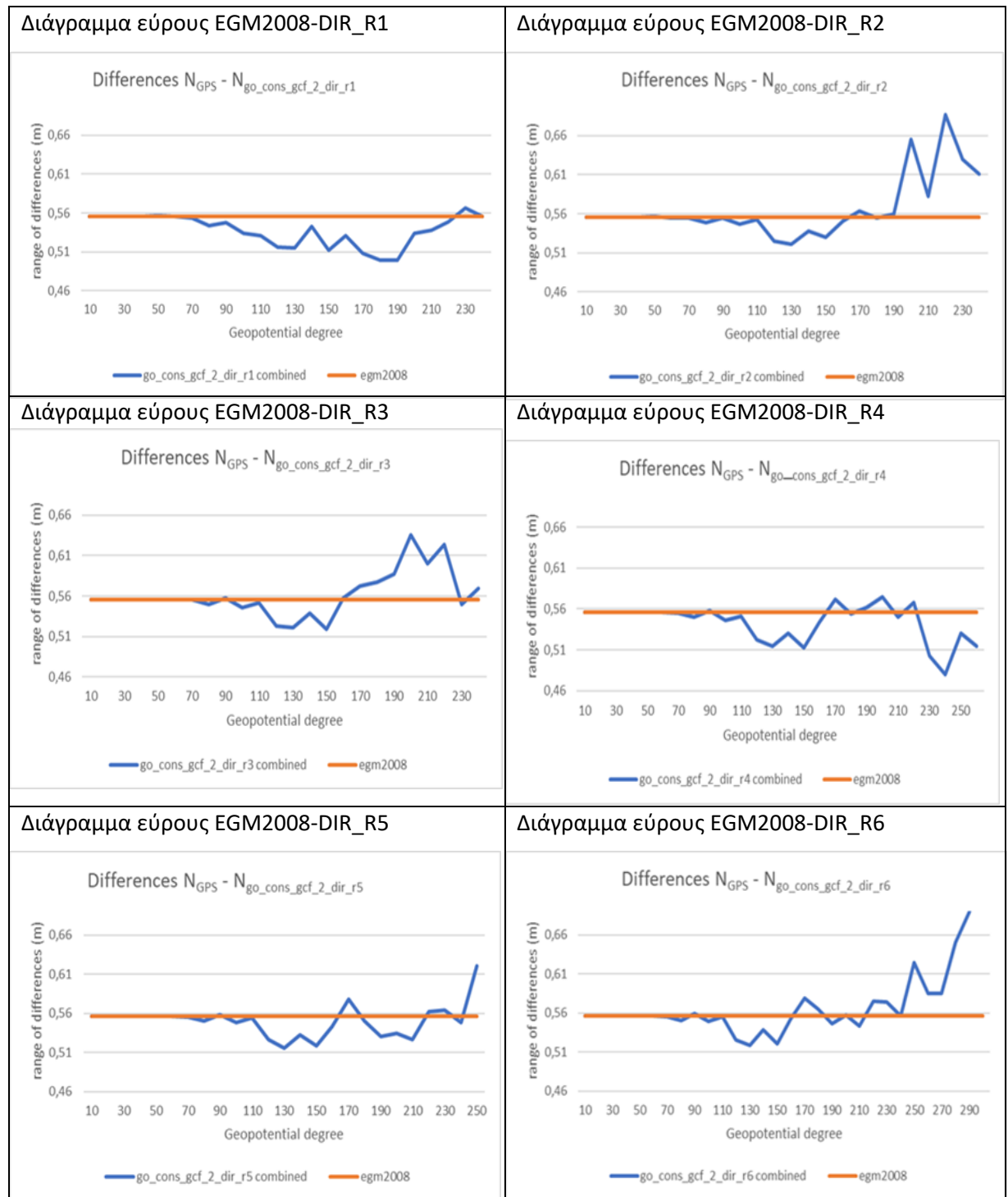
Η συνεισφορά των μοντέλων του GOCE και το εύρος των συχνοτήτων που επηρεάζονται από την εισαγωγή των δεδομένων της δορυφορικής βαθμιδομετρίας αποδεικνύονται με τη μελέτη των στατιστικών στοιχείων των διαφορών στα σημεία ελέγχου.

#### 4.3.1 Μελέτη του εύρους των διαφορών

Μελετήθηκαν καταρχάς τα εύρη των διαφορών μεταξύ των αποχών του γεωειδούς που προκύπτουν από τη διαφορά γεωμετρικού υψομέτρου από τα GNSS και ορθομετρικών υψομέτρων των σημείων ελέγχου με τις εμπλουτισμένες αποχές του γεωειδούς του EGM2008 με τα μοντέλα του GOCE. Η κάθε έκδοση του μοντέλου μελετήθηκε ξεχωριστά και αναλύθηκε η εξέλιξη της κάθε διαδικασίας. Παρατηρείται από τα διαγράμματα ότι το εύρος βαθμών ενσωμάτωσης 110 - 150 είναι το καλύτερο. Επίσης υπάρχει μια βελτίωση του εμπλουτισμένου μοντέλου SPW σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο TIM και ακολούθως του εμπλουτισμένου μοντέλου DIR σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο SPW.

#### 4.3.1.1 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων DIR

Τα διαγράμματα δημιουργήθηκαν μέσω του λογισμικού Excel, όπου στο οριζόντιο άξονα εισήχθησαν οι τιμές από το ελάχιστο έως το μέγιστο βαθμό κάθε φορά(ανάλογα με την έκδοση) και στον κάθετο άξονα εισήχθησαν οι τιμές που προκύπτουν από τη διαφορά γεωμετρικού υψομέτρου από τα GNSS και ορθομετρικών υψομέτρων των σημείων ελέγχου και οι εμπλουτισμένες αποχές του γεωειδούς του EGM2008 με τα μοντέλα του GOCE



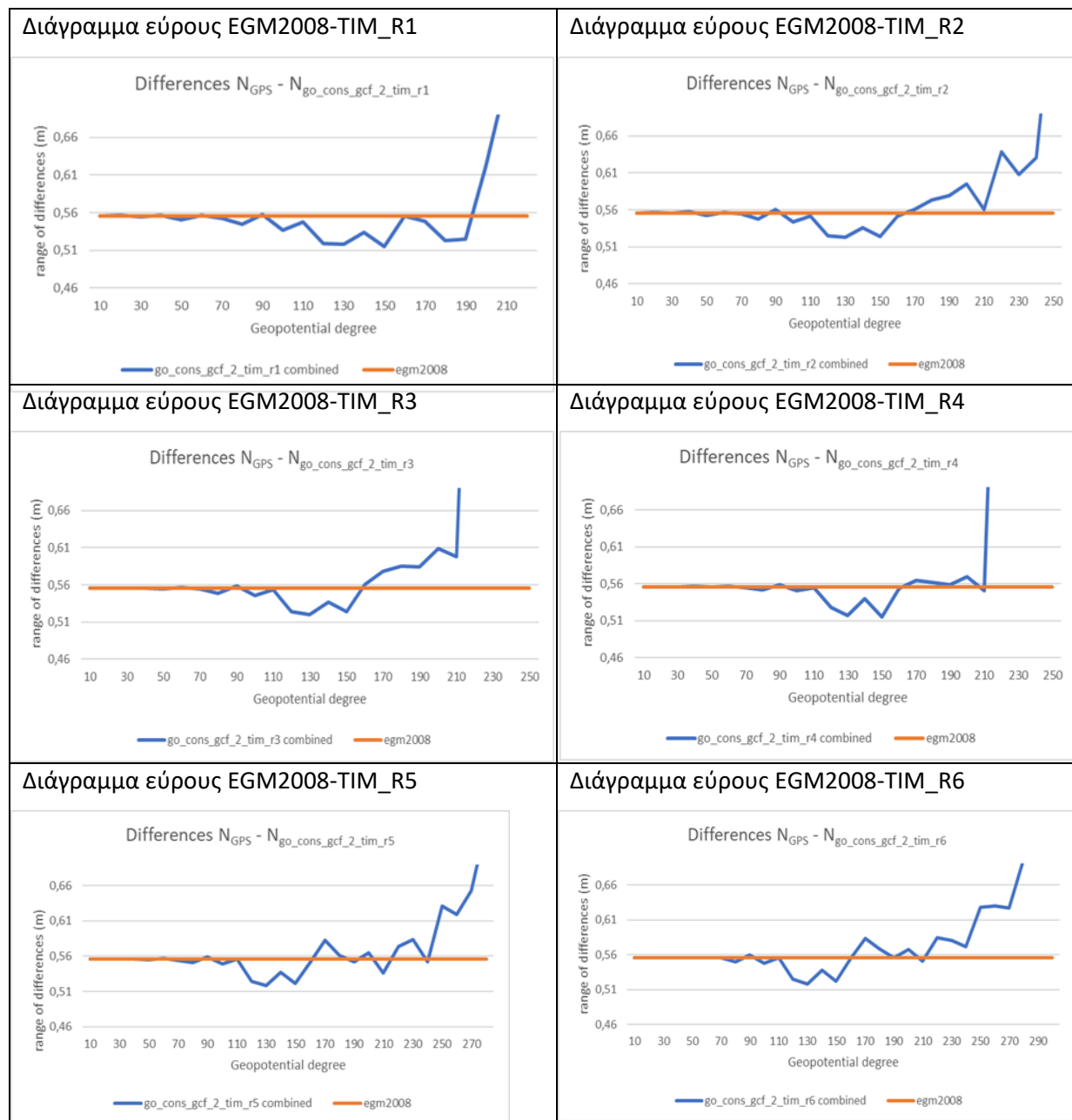
Σχήμα 4.3 Διαγράμματα εύρους EGM2008-DIR

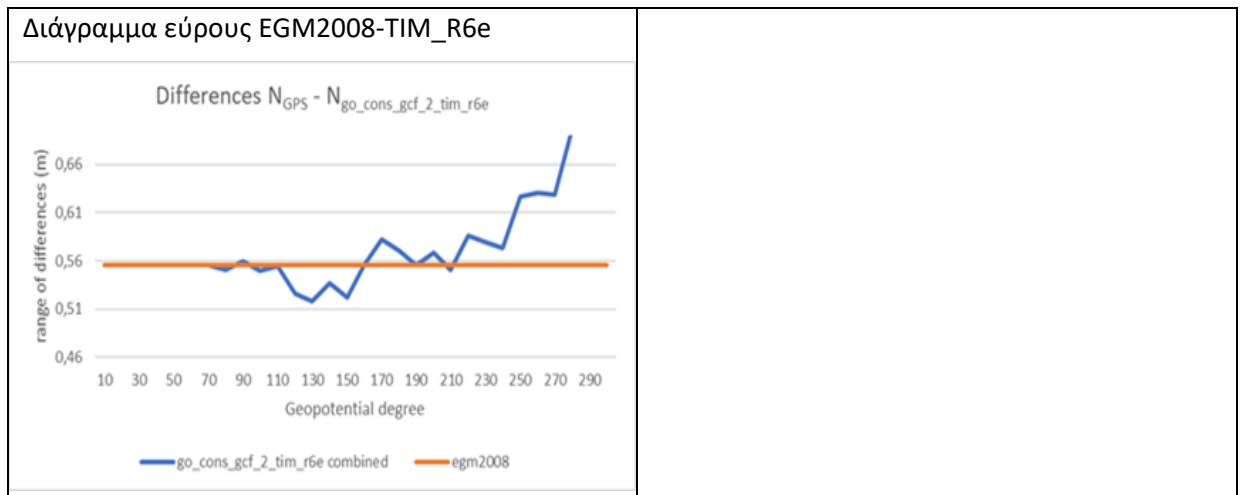


Παρατηρώντας τα διαγράμματα του Σχήματος 4.3 φαίνεται ότι τα καλύτερα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην ενσωμάτωση των βαθμών 130 και 150, ενώ με την εξέλιξη των εκδόσεων το εύρος των διαφορών στη συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων βελτιώνεται, έστω και ελάχιστα.

#### 4.3.1.2 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων TIM

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.



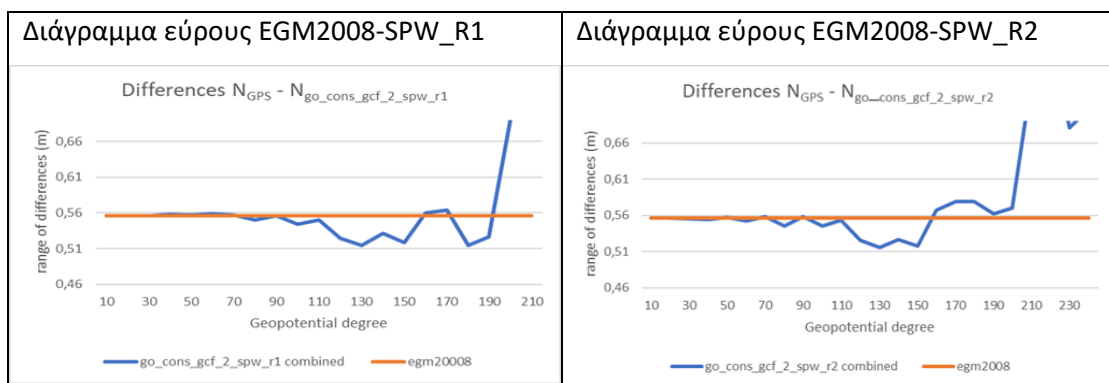


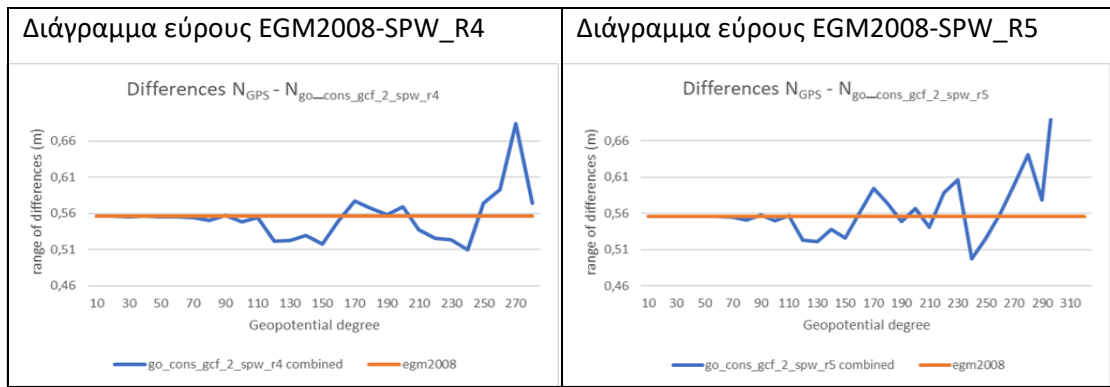
Σχήμα 4.4 Διαγράμματα εύρους EGM2008-TIM

Στα διαγράμματα του Σχήματος 4.4 παρουσιάζεται η ίδια βελτίωση στους βαθμούς ανάπτυξης 130 και 150 με την ενσωμάτωση των δεδομένων του GOCE. Η καλύτερη έκδοση παρουσιάζεται η έκδοση 4 του μοντέλου, όπου έστω και ελάχιστα, το εύρος των διαφορών στη ζώνη 130 – 150 λαμβάνει την ελάχιστη διαφορά της.

#### 4.3.1.3 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων SPW

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.





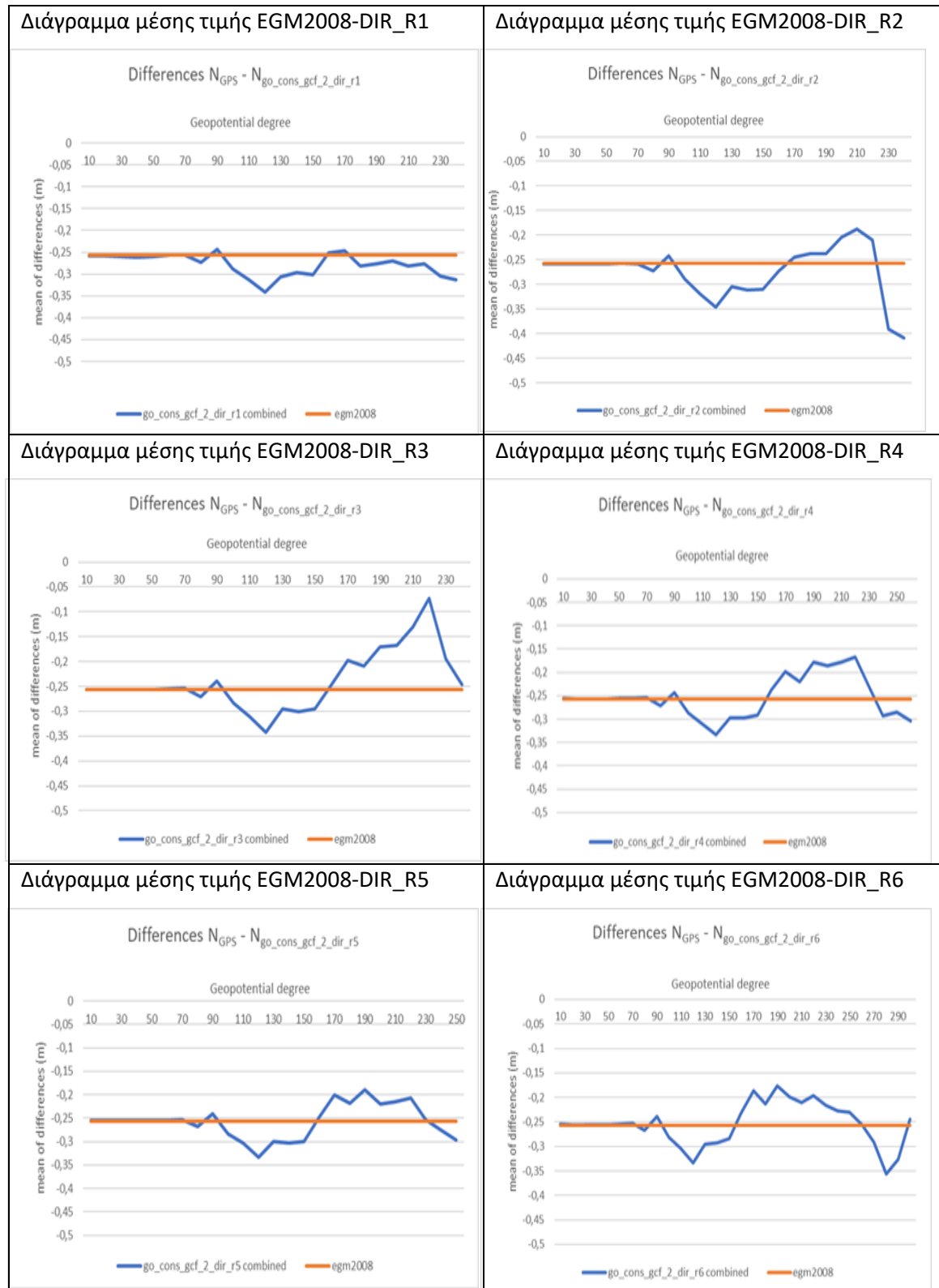
**Σχήμα 4.5** Διαγράμματα εύρους EGM2008-SPW

Στα μοντέλα SPW παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά στη ζώνη των βαθμών ενσωμάτωσης 130 – 150. Παρουσιάζεται όμως επίσης μία βελτίωση στην ενσωμάτωση των μοντέλων του GOCE-SPW στο βαθμό ανάπτυξης 230, κάτι που διαφοροποιεί αυτές τις λύσεις σε σύγκριση με τις προηγούμενες.

#### 4.3.2 Μελέτη μέσης τιμής διαφορών

Στη συνέχεια μελετήθηκε η μέση τιμή των διαφορών μεταξύ των αποχών του γεωειδούς που προκύπτουν από τη διαφορά γεωμετρικού υψομέτρου από τα GNSS και ορθομετρικών υψομέτρων των σημείων ελέγχου με τις εμπλουτισμένες αποχές του γεωειδούς του EGM2008 με τα μοντέλα του GOCE. Η κάθε έκδοση του μοντέλου μελετήθηκε ξεχωριστά και αναλύθηκε η εξέλιξη της κάθε διαδικασίας. Παρατηρείται από τα διαγράμματα ότι το εύρος βαθμών ενσωμάτωσης 110 - 150 είναι το καλύτερο. Επίσης υπάρχει μια βελτίωση του εμπλουτισμένου μοντέλου SPW σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο TIM και ακολούθως του εμπλουτισμένου μοντέλου DIR σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο SPW.

#### 4.3.2.1 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων DIR

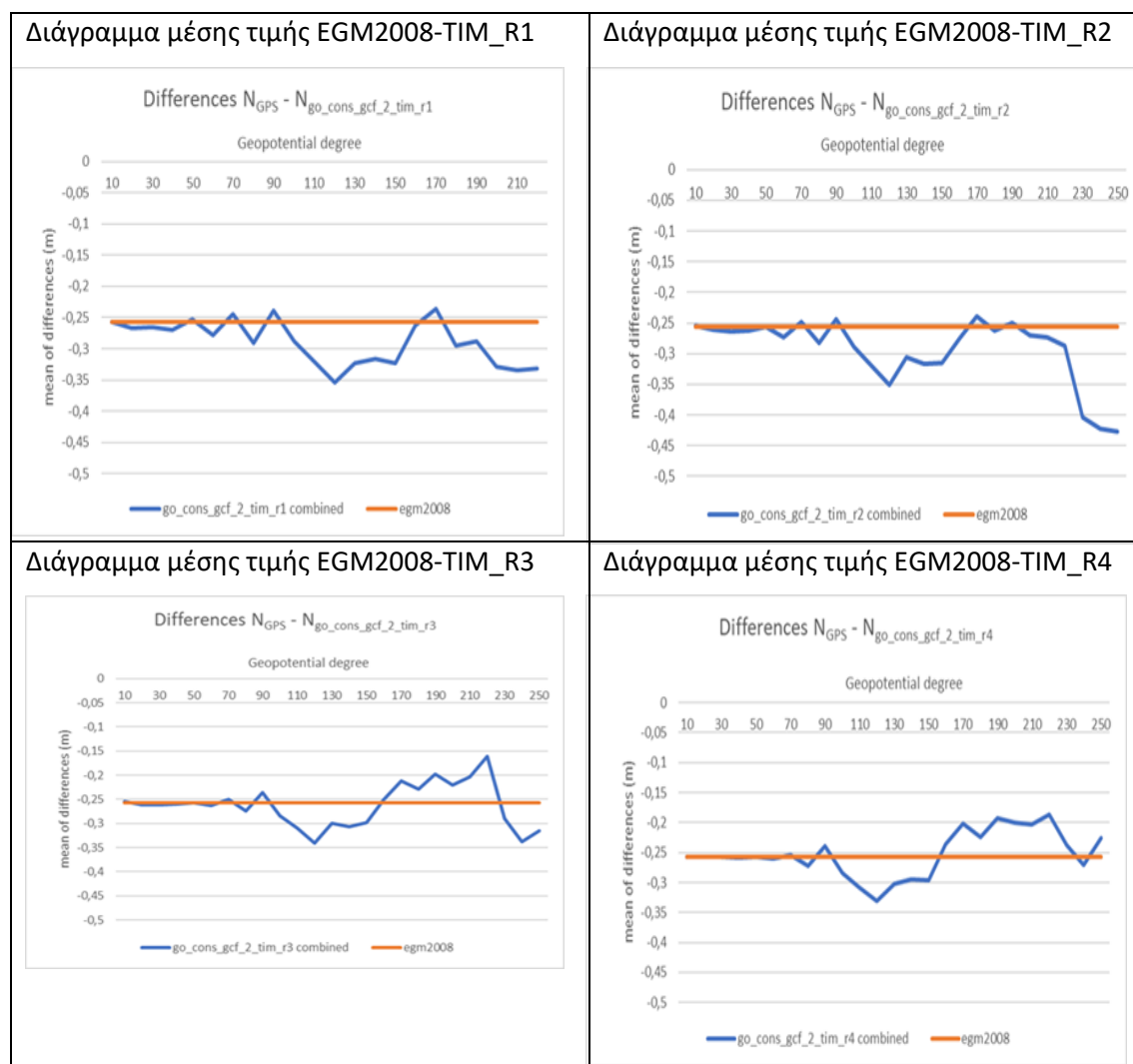


Σχήμα 4.6 Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-DIR

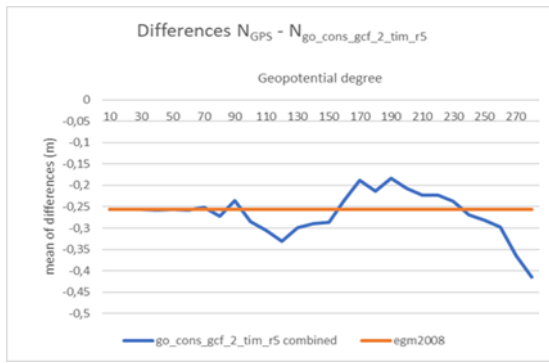
Οι μέσες τιμές των διαφορών παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις σε σύγκριση με τις μέσες τιμές του καθαρού μοντέλου αναφοράς EGM2008 μετά το βαθμό ανάπτυξης 70. Ο βαθμός αυτός είναι ενδεικτικός της επίδρασης των δεδομένων του GOCE στις μέσες συχνότητες του φάσματος του πεδίου βαρύτητας. Οι μεγάλες διαφοροποιήσεις παρουσιάζονται γύρω από το βαθμό ενσωμάτωσης 120 και στη συνέχεια μετά το βαθμό 200.

#### 4.3.2.2 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων TIM

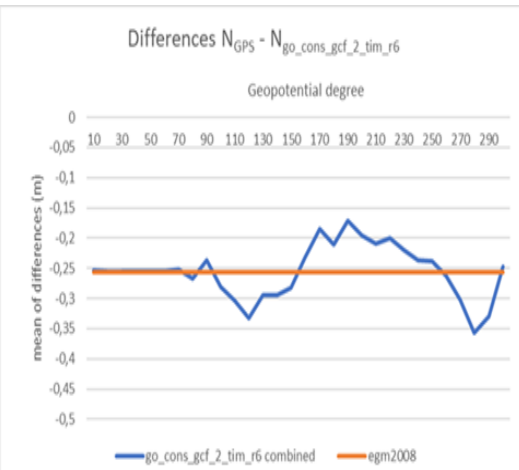
Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.



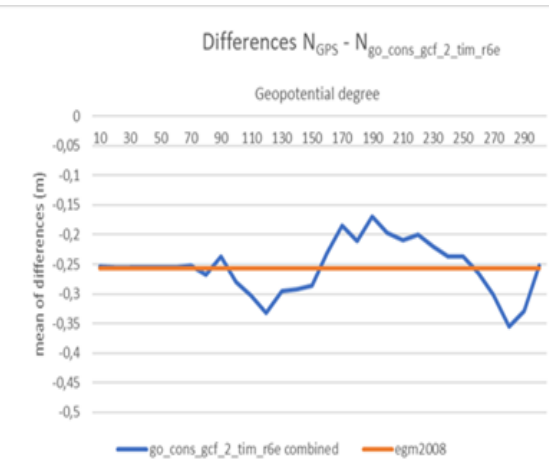
Διάγραμμα μέσης τιμής EGM2008-TIM\_R5



Διάγραμμα μέσης τιμής EGM2008-TIM\_R6



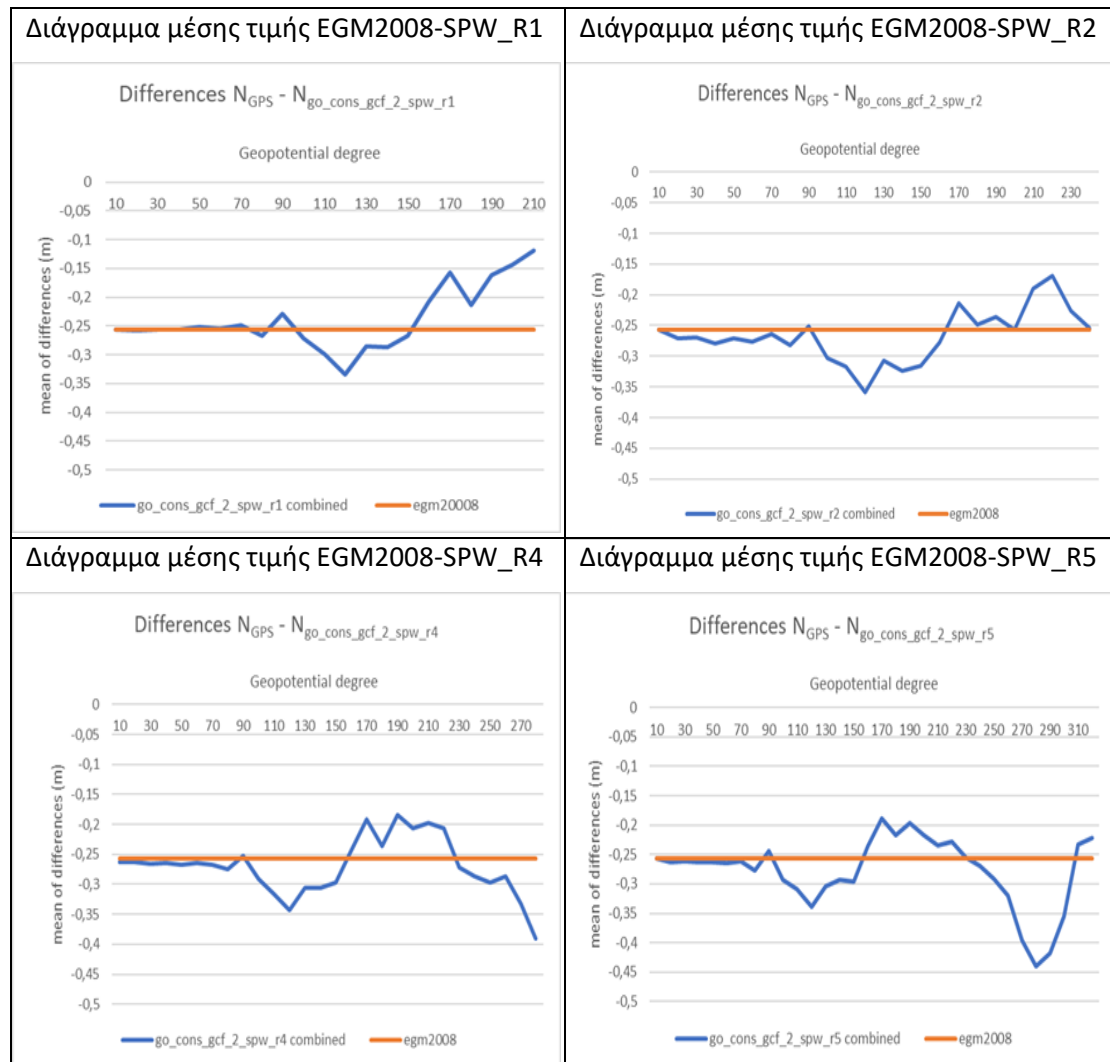
Διάγραμμα μέσης τιμής EGM2008-TIM\_R6e



Σχήμα 4.7 Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-TIM

#### 4.3.2.3 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων SPW

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.

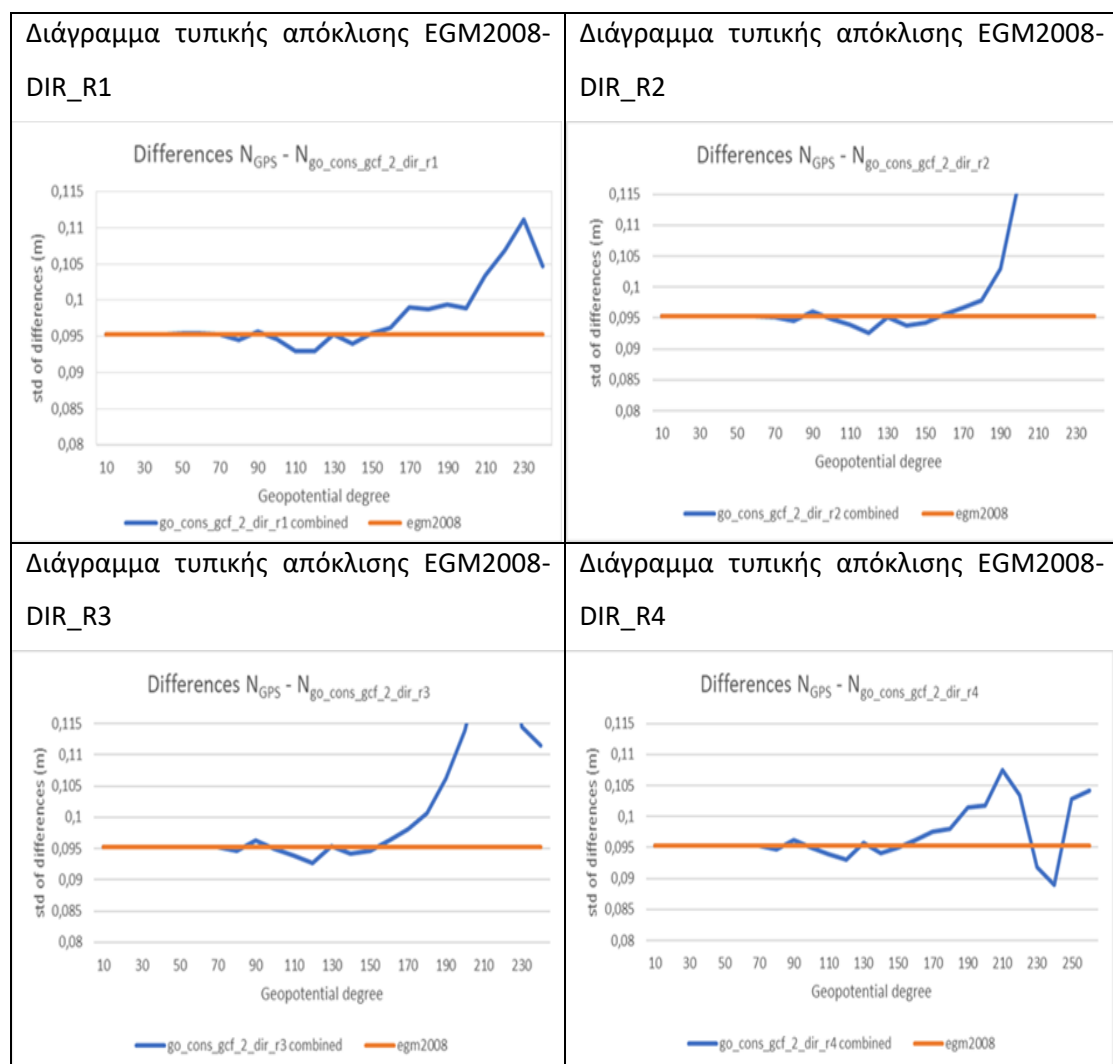


Σχήμα 4.8 Διαγράμματα μέσης τιμής EGM2008-SPW

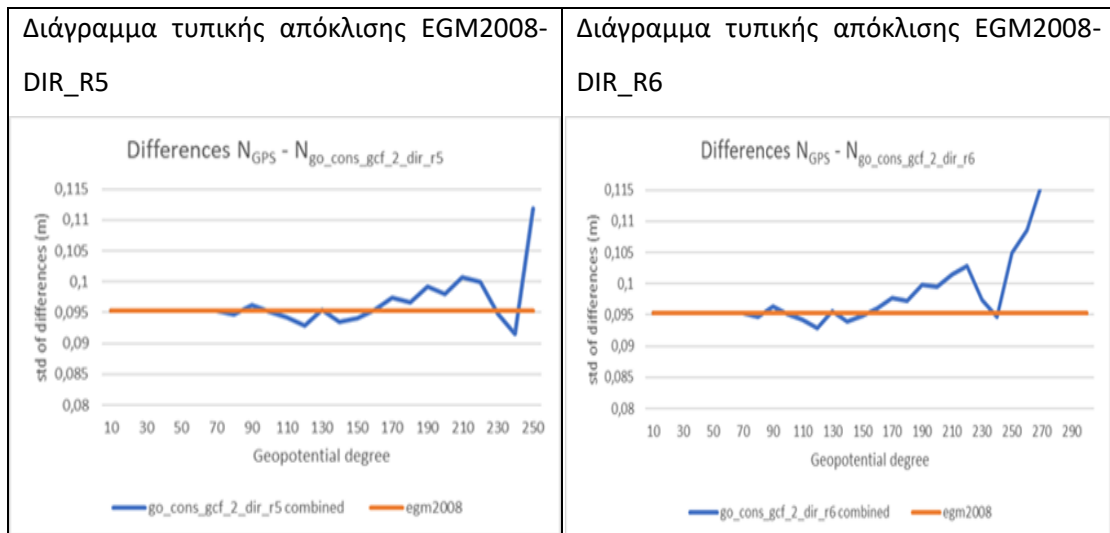
### 4.3.3 Μελέτη τυπικής απόκλισης διαφορών

Στη συνέχεια μελετήθηκε η τυπική απόκλιση των διαφορών μεταξύ των αποχών του γεωειδούς που προκύπτουν από τη διαφορά γεωμετρικού υψομέτρου από τα GNSS και ορθομετρικών υψομέτρων των σημείων ελέγχου με τις εμπλουτισμένες αποχές του γεωειδούς του EGM2008 με τα μοντέλα του GOCE. Η κάθε έκδοση του μοντέλου μελετήθηκε ξεχωριστά και αναλύθηκε η εξέλιξη της κάθε διαδικασίας. Παρατηρείται από τα διαγράμματα ότι το εύρος βαθμών ενσωμάτωσης 110 - 150 είναι το καλύτερο. Επίσης υπάρχει μια βελτίωση του εμπλουτισμένου μοντέλου SPW σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο TIM και ακολούθως του εμπλουτισμένου μοντέλου DIR σε σχέση με το εμπλουτισμένο μοντέλο SPW.

#### 4.3.3.1 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων DIR





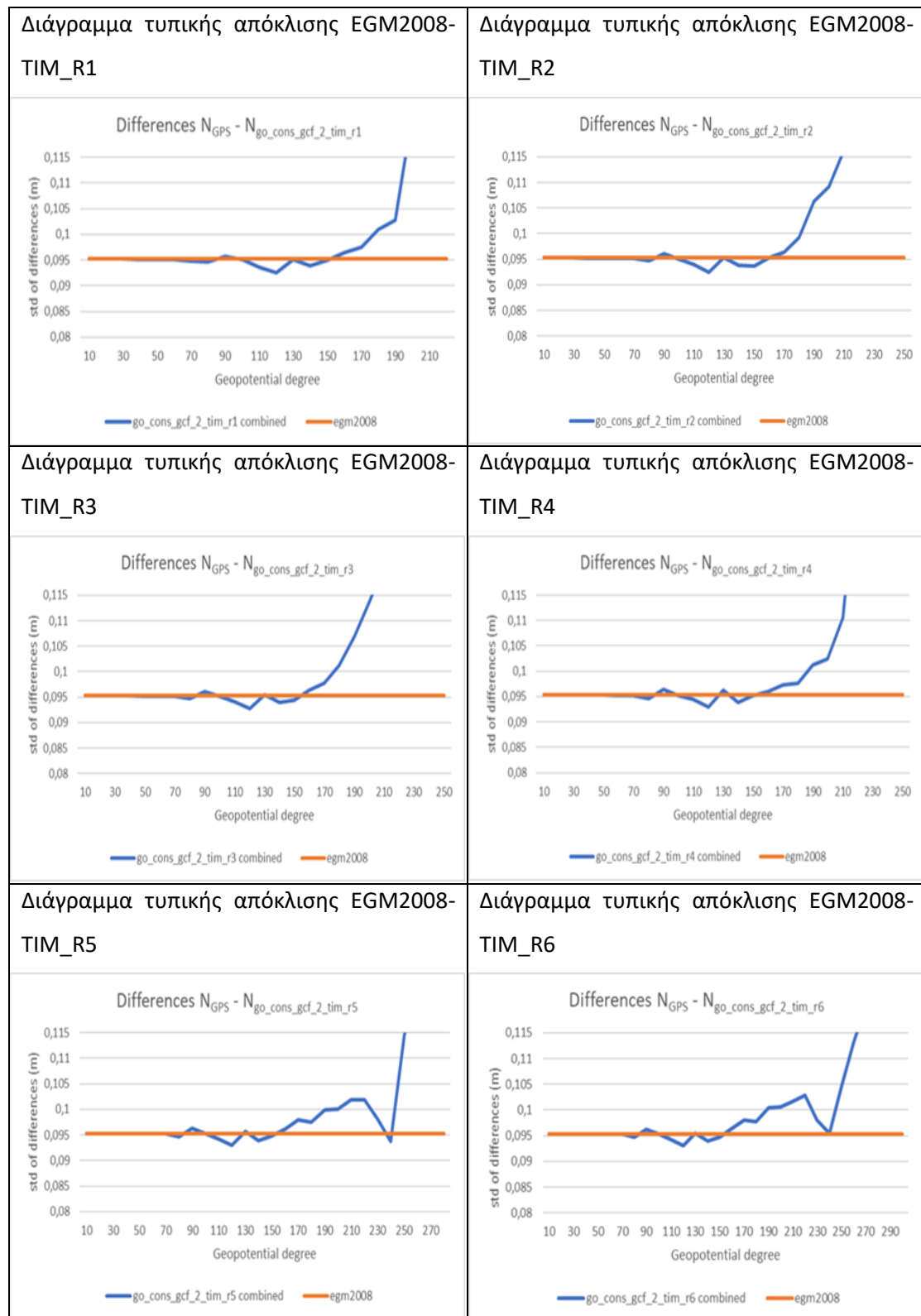


**Σχήμα 4.9** Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-DIR

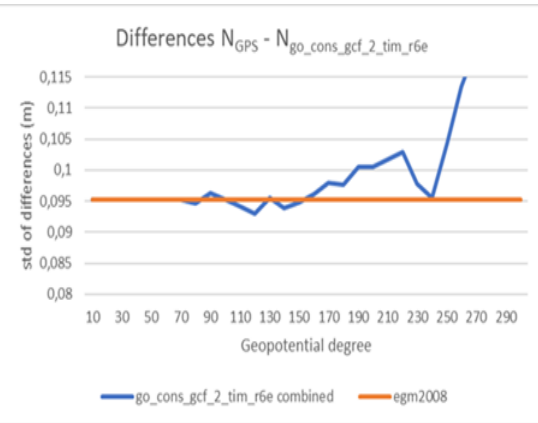
Στα μοντέλα της έκδοσης DIR, παρατηρείται μία βελτίωση στην τιμή της τυπικής απόκλισης των διαφορών στη ζώνη μετά το βαθμό ενσωμάτωσης 100 και μέχρι το βαθμό 150. Η βελτίωση αυτή είναι της τάξης των μερικών χιλιοστών.

#### 4.3.3.2 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων TIM

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.



Διάγραμμα τυπικής απόκλισης EGM2008-TIM\_R6e

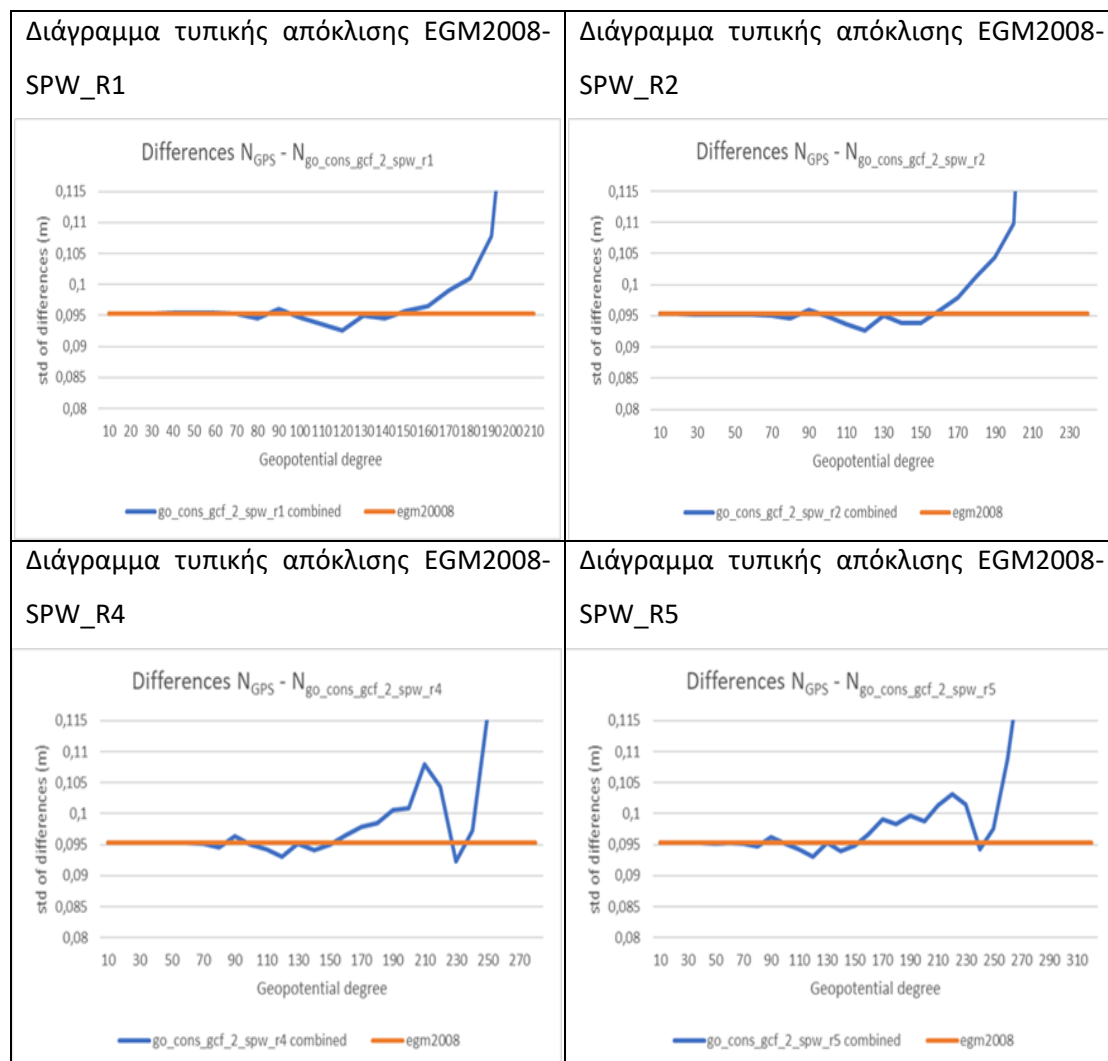


Σχήμα 4.10 Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-TIM

Στα μοντέλα της οικογένειας TIM παρουσιάζεται επίσης μία βελτίωση στην τιμή της τυπικής απόκλισης των διαφορών στη ζώνη μεταξύ του βαθμού ανάπτυξης 100 – 150 της τάξης των μερικών χιλιοστών. Επιπλέον, μετά το βαθμό ενσωμάτωσης 160, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται χειρότερα σε σύγκριση με το αυθεντικό μοντέλο αναφοράς EGM2008.

#### 4.3.3.3 Μελέτη εκδόσεων μοντέλων SPW

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως.



**Σχήμα 4.11** Διαγράμματα τυπικής απόκλισης EGM2008-SPW

Η συμπεριφορά των μοντέλων SPW στα στατιστικά της τυπικής απόκλισης των διαφορών παρουσιάζεται παρόμοια με τις προηγούμενες δύο λύσεις.

Για βαθμό ενσωμάτωσης 110 – 150 στο εμπλουτισμένο γεωδυναμικό μοντέλο DIR το καλύτερο μοντέλο είναι το GOCE\_DIR\_2 στο βαθμό 120. Προκύπτει με βάση τα στατιστικά στοιχεία(range-mean-sd), όπου παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.9.

**Πίνακας 4.9** Στατιστικά μοντέλων EGM2008 και GOCE(m)

Μοντέλο	max	min	sd
GOCE(βαθμός 120)			
EGM2008	0,555	-0,257	0,095
DIR_R1	0,516	-0,342	0,093
DIR_R2	0,525	-0,347	0,092
DIR_R3	0,523	-0,342	0,093
DIR_R4	0,522	-0,334	0,093
DIR_R5	0,526	-0,334	0,093
DIR_R6	0,525	-0,333	0,093
SPW_R1	0,524	-0,334	0,093
SPW_R2	0,525	-0,359	0,093
SPW_R4	0,521	-0,343	0,093
SPW_R5	0,523	-0,339	0,093
TIM_R1	0,519	-0,355	0,093
TIM_R2	0,525	-0,350	0,093
TIM_R3	0,524	-0,341	0,093
TIM_R4	0,528	-0,331	0,093
TIM_R5	0,525	-0,330	0,093
TIM_R6	0,525	-0,333	0,093
TIM_R6e	0,526	-0,332	0,093

Από τα στοιχεία του πίνακα 4.9 παρατηρείται ότι η συμπεριφορά της ενσωμάτωσης των διαφορετικών μοντέλων που δοκιμάστηκαν στην περιοχή μελέτης είναι παρόμοια. Επίσης, σε σύγκριση με το EGM2008, η βελτίωση των στατιστικών παρουσιάζεται ελάχιστη. Η έκταση της περιοχής μελέτης συμβάλλει στην παρόμοια στατιστική συμπεριφορά των διαφορετικών μοντέλων. Παρόλ' αυτά παρουσιάζεται μία βελτίωση στα στατιστικά των διαφορών σε

σύγκριση με τις αποχές του γεωειδούς που προκύπτουν από τη διαδικασία της υψομετρίας με GNSS.

#### 4.4 Εύρεση τελικής ακρίβειας

Υπολογίζεται η τελική ακρίβεια με την οποία μπορεί να υπολογιστούν τα ορθομετρικά υψόμετρα χρησιμοποιώντας GNSS μετρήσεις και γεωδυναμικά μοντέλα. Με βάση τα δύο προηγούμενα στάδια, αφού έχει βρεθεί το καλύτερο παραμετρικό μοντέλο (τέταρτο) και το καλύτερο εμπλουτισμένο γεωδυναμικό μοντέλο (GOCE\_DIR\_2).

Η τελική ακρίβεια υπολογίζεται πραγματοποιώντας την εσωτερική και εξωτερική αξιολόγηση.

Η εσωτερική αξιολόγηση υπολογίζεται με τη μέθοδο εξισώσεων παρατηρήσεων (Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων) μέσω του λογισμικού Matlab. Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων καθώς και η τελική λύση της συνόρθωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$N = A^T P A \rightarrow u = A^T P b \rightarrow x = N^{-1} u \quad (4.24)$$

Για τον υπολογισμό της ακρίβειας των εκτιμήσιμων παραμέτρων, καθώς και για τη στατιστική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης, υπολογίζεται στο Matlab το διάνυσμα των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων και η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης αναφοράς σύμφωνα με:

$$\hat{v} = b - A \hat{x} \quad (4.25)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T \hat{v}}{n-m} \quad (4.26)$$

Όπου  $\hat{\sigma} = 0,086\text{m}$

Στην συνέχεια, υπολογίζεται ο πίνακας των εκτιμήσεων των (συμ)μεταβλητοτήτων των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\hat{C}_{\hat{v}} = \hat{\sigma}^2 (P^{-1} - AN^{-1}A^T) \quad (4.27)$$

Με βάση τον οποίο υπολογίζονται το εσωτερικό και εξωτερικό ομαλοποιημένο σφάλμα για κάθε παρατήρηση, όπου καμία παρατήρηση δεν απομακρύνεται.

Η εξωτερική αξιολόγηση πραγματοποιείται αφαιρώντας 15 σημεία από τα 99 σημεία και ακολούθως εφαρμόζεται η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων. Με τις εκτιμήσεις των συντελεστών των αγνώστων υπολογίζονται τα ορθομετρικά υψόμετρα των 15 σημείων που έχουν αφαιρεθεί σύμφωνα με τη σχέση

$$\hat{H}_i = h_{ii} - N_{EGM2008i} - a_i^T \hat{x} \quad (4.28)$$

Και υπολογίζονται η διαφορές από τα γνωστά ορθομετρικά υψόμετρα. Τέλος υπολογίζεται η τυπική απόκλιση στα 15 επιλεγμένα σημεία ελέγχου, όπου  $\hat{\sigma}=0,205\text{m}$

**Πίνακας 4.10** Ορθομετρικά υψόμετρα (m)

Κωδικός σημείου	H αρχικό	H από μοντέλο	ΔH
10	140,453	140,429	-0,024
25	191,024	190,986	-0,038
38	145,377	145,340	-0,037
43	608,175	608,106	-0,069
45	457,352	457,278	-0,074
46	481,512	481,434	-0,078
48	310,902	310,882	-0,020
57	100,595	100,536	-0,059
58	414,966	414,921	-0,045
61	147,538	147,455	-0,083
67	155,814	155,666	-0,148
68	214,301	214,174	-0,127
73	85,802	85,785	-0,017
82	294,392	294,405	0,013
91	1,679	1,667	-0,012

**Πίνακας 4.11** Στατιστικά ορθομετρικών υψομέτρων (m)

Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέση τιμή	Εύρος	Τυπική απόκλιση
-0,147	0,013	-0,054	0,160	0,205

## Συμπεράσματα

Η υψηλή ακρίβεια και διακριτική ικανότητα των γεωδυναμικών μοντέλων του GOCE αποτελεί ένα ακόμα βήμα στη βελτίωση των μεθόδων της υψομετρίας με GNSS. Τα γεωμετρικά υψόμετρα που προκύπτουν από τις δορυφορικές μετρήσεις συνδυάζονται με τις αποχές του γεωειδούς με σκοπό τον υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων. Η ακρίβεια και η αξιοπιστία του τελικού ορθομετρικού υψομέτρου εξαρτάται από την ακρίβεια των συνδυαζόμενων υψομέτρων, όπως επίσης και από τις μεθόδους συνδυασμού αυτών.

Στην εργασία εξετάστηκαν τρόποι συνδυασμού και αξιολόγησης της υψομετρικής πληροφορίας που παρέχεται από τις δορυφορικές παρατηρήσεις των GNSS και τα σύγχρονα γεωδυναμικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας. Επιπλέον, ελέγχθηκε η συνεισφορά των δεδομένων του GOCE με την ενσωμάτωση των χαμηλών συχνοτήτων των γεωδυναμικών του μοντέλων στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο αναφοράς EGM2008. Η ενσωμάτωση πραγματοποιήθηκε διαδοχικά ανά βαθμό. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, βελτίωση στα στατιστικά των διαφορών μεταξύ των αποχών του γεωειδούς που προκύπτουν από την υψομετρία GNSS και των αποχών από τα γεωδυναμικά μοντέλα εμφανίζονται με την ενσωμάτωση των μέσων συχνοτήτων των μοντέλων του GOCE. Ειδικότερα, στη ζώνη των βαθμών ενσωμάτωσης από 100 – 150 εμφανίζονται βελτιώσεις στα στατιστικά των διαφορών σε σύγκριση με το αυθεντικό γεωδυναμικό μοντέλο EGM2008. Ο συνδυασμός των βελτιωμένων γεωδυναμικών μοντέλων με τις παρατηρήσεις των GNSS πραγματοποιείται με τη χρήση κατάλληλων παραμετρικών μοντέλων, η ακρίβεια και η αξιοπιστία των οποίων διερευνήθηκε διεξοδικά. Για την εύρεση του βέλτιστου γεωδυναμικού μοντέλου σε συνδυασμό με το αντίστοιχο παραμετρικό μοντέλο για την περιοχή μελέτης χρησιμοποιούνται κριτήρια βελτιστοποίησης αφορούν στην αξιολόγηση, τόσο της εσωτερικής, όσο και της εξωτερικής ακρίβειας σημείων αναφοράς, καθώς και τη στατιστική συμπεριφορά των υπολοίπων σφαλμάτων της συνόρθωσης. Η εσωτερική ακρίβεια της συνόρθωσης στην περιοχή μελέτης χρησιμοποιώντας το καλύτερο παραμετρικό μοντέλο και το γεωδυναμικό μοντέλο του GOCE που προσαρμόζεται καλύτερα έφτασε τα εκατοστά σε όρους τυπικής απόκλισης των διαφορών με τις αποχές του γεωειδούς που προκύπτουν από την υψομετρία GNSS.

Στην παρούσα εργασία αναλύεται και επιβεβαιώνεται η συνεισφορά των χαμηλών αρμονικών των γεωδυναμικών μοντέλων που προέκυψαν από την επεξεργασία των



δεδομένων του δορυφόρου GOCE. Για πρώτη φορά, η μέθοδος της δορυφορικής βαθμιδομετρίας χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση του πεδίου βαρύτητας. Λόγω της εξασθένησης του σήματος της βαρύτητας στο υψόμετρο πτήσης των δορυφορικών αποστολών, οι ανακτώμενες συχνότητες του σήματος παρέμεναν σε χαμηλά επίπεδο ( $n = 120 - 140$ ) μέχρι την έλευση του GOCE. Με την εφαρμογή της βαθμιδομετρίας στις δορυφορικές αποστολές, τόσο η ακρίβεια, όσο και η διακριτική ικανότητα των τελικών προϊόντων αυξήθηκε. Πλέον, οι ανακτώμενες συχνότητες των γεωδυναμικών μοντέλων από τον GOCE μπορούν να φτιάσουν το βαθμό 300, ενώ η ακρίβεια, ιδιαίτερα των συντελεστών χαμηλού βαθμού, μεταφράζεται σε ακρίβεια περίπου 1 cm στην υπολογιζόμενη αποχή του γεωειδούς.

Η εκτίμηση της ακρίβειας στην αποχή του γεωειδούς καθιστά τα δεδομένα του GOCE κατάλληλα για τον έλεγχο και την αξιολόγηση υψομετρικής πληροφορίας σε περιοχές ενδιαφέροντος, όπως επίσης και για την ίδρυση και την αποτελεσματική ενοποίηση κατακόρυφων συστημάτων αναφοράς. Ιδιαίτερα στην Ελλάδα, με τον προβληματικό χαρακτήρα του Ελληνικού κατακόρυφου δικτύου αναφοράς, λόγω των διαφορετικών αφετηριών και σταθμών (π.χ., παλιρροιογράφοι Πειραιά, Ηρακλείου, τοπικοί παλιρροιογράφοι) κρίνεται απαραίτητη η ενσωμάτωση των δεδομένων σε υπάρχοντα γεωδυναμικά μοντέλα υψηλής ανάπτυξης με σκοπό τη βελτίωση των χαμηλών συχνοτήτων των μοντέλων αυτών.

Συμπερασματικά, μέσα από τη μελέτη της συγκεκριμένης εργασίας διαπιστώνεται, έχοντας ως αρχικά δεδομένα τα ορθομετρικά και γεωμετρικά υψόμετρα καθώς και τις αποχές γεωειδούς, ότι μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να υπολογιστεί η ακρίβεια του καταλληλότερου παραμετρικού μοντέλου (τέταρτο μοντέλο), ακολούθως η εύρεση του κατάλληλου γεωδυναμικού μοντέλου (GOCE\_DIR\_2), όπως παρατηρείται με την ενσωμάτωση των δεδομένων του GOCE με τα οποία υπολογίζεται η καλύτερη ακρίβεια, βρίσκοντας ακόμη και την τελική ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί, μέσω της εσωτερικής και εξωτερικής αξιολόγησης.

Μέχρι στιγμής μέσω των δορυφόρων έχουμε μια σχετική καλή ακρίβεια αλλά δεν επιτυγχάνεται η απαραίτητη ακρίβεια για τις τοπογραφικές εφαρμογές. Για να επιτύχουμε μια καλή ακρίβεια είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το ορθομετρικό υψόμετρο των σημείων χρησιμοποιώντας μια παραμετρική επιφάνεια. Μέχρι να υπάρξει καλύτερης ακρίβεια παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο στο μέλλον, με το οποίο θα μπορούμε απευθείας να έχουμε το ορθομετρικό υψόμετρο (αφαιρώντας το ελλειψοειδές υψόμετρο από την αποχή γεωειδούς).

## Βιβλιογραφία

1. W. E. Featherstone, "Height systems and vertical datums: a review in the Australian context" Curtin University of Technology
2. Helmut Moritz (2006) "Physical Geodesy\_Heights" Εκδόσεις Springer, Vienna
3. University of Connecticut( 2006) "What Does Height Really Mean? Part III: Height Systems" Department of Natural Resources and the Environment
4. Αράμπελος Δημήτριος (2007) "Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης" Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη
5. Αράμπελος Δημήτριος (1991)"Στοιχεία γεωφυσικών διασκοπήσεων" Εκδόσεις Ζήτη
6. Helmut Moritz (2006) "Gravity field of the earth" Εκδόσεις Springer, Vienna
7. Pavlis, N. K. (2012) " Global Gravitational Models" National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), USA
8. Pavlis, N. K. et al. (2012) "The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)" Journal of Geophysical Research
9. <https://cddis.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>
10. Akylbek Chymyrov (2014) Analysis of EGM2008 as a Geoid Model for Kyrgyzstan" Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture
11. Kwang Bae Kim (2020) "Accuracy Evaluation of Geoid Heights in the National Control Points of South Korea Using High-Degree Geopotential Model" School of Civil, Architectural, and Environmental System Engineering, Sungkyunkwan University
12. WenBin Shen (2013) Global Geoid Modeling and Evaluation" Εκδόσεις IntechOpen London
13. National Geospatial-Intelligence Agency (2014) "standardization document" Department Of Defense Word Geodetic System 1984
14. Βέργος Γεώργιος (2011) "Σύγχρονες δορυφορικές αποστολές μελέτης του πεδίου βαρύτητας της Γης και συμβολή στις γεωεπιστήμες" Πολυτεχνική Σχολή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
15. ΑΡΧΗΜΗΔΗΣ ΙΙΙ (2013) "Ερευνητικό πρόγραμμα" Ενίσχυση Ερευνητικών Ομάδων ΤΕΙ
16. Barthelmes Franz (2013) "Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models" Scientific Technical Report STR09/02, GFZ Helmholtz-Zentrum Potsdam
17. [http://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime)

18. Sean L. Bruinsma (2013) " new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach" American Geophysical Union
19. Migliaccio Federica (2004) "Space-wise approach to satellite gravity field determination in the presence of coloured noise" Εκδόσεις Springer
20. R. Klees (2002) "The Performance of the Time-wise Semi-analytical Inversion of Satellite Gravity Gradients" Εκδόσεις Springer
21. National Aeronautics and Space Administration "GRACE-FO, Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On"
22. Καλαμπόγιας Νίκος (2012) "Η δορυφορική αποστολή GOCE" Σχολή Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
23. <https://earth.esa.int/web/eoportal/satellite-missions/g/goce>
24. [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Operations/GOCE](https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/GOCE)
25. [https://www.esa.int/Applications/Observing\\_the\\_Earth/GOCE/Taking\\_gravity\\_from\\_strength\\_to\\_strength](https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/GOCE/Taking_gravity_from_strength_to_strength)
26. [https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite\\_missions/past\\_missions/goce\\_general.html](https://ilrs.gsfc.nasa.gov/missions/satellite_missions/past_missions/goce_general.html)