ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ & ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ: ΓΕΩΧΩΡΙΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

Σχετικός προσανατολισμός ζεύγους σφαιρικών εικόνων: Υλοποίηση και αξιολόγηση διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Κυπαρίσση Σταυρούλα (ΑΜ:1602)

Επιβλέποντες:
Γραμματικόπουλος Λ.
Καρράς Γ.
Πέτσα Ε.

ΑΘΗΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, Λάζαρο Γραμματικόπουλο, για την βοήθεια και τις συμβουλές του, όχι μόνο κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας αλλά και κατά την διάρκεια των σπουδών μου τα δύο τελευταία χρόνια. Ένα ακόμα μεγάλο ευχαριστώ σε δύο ανθρώπους που εκτιμώ και θαυμάζω εδώ και πολλά χρόνια, στους Γιώργο Καρρά και Έλλη Πέτσα για την βοήθεια, την ενθάρρυνση και την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα αντικείμενο που πάντα ήθελα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Έλλη, την Αθηνά και πάνω από όλα την μητέρα μου για την εμπιστοσύνη, την υποστήριξη και την συνολική συμπαράστασή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σχετικός προσανατολισμός αποτελούσε και εξακολουθεί να αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Φωτογραμμετρίας και της Όρασης Υπολογιστών, καθώς η εύρεση της σχετικής θέσης δύο επικαλυπτόμενων εικόνων είναι το κλειδί για πλήθος εφαρμογών. Η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού ισοδυναμεί με την αποκατάσταση της αλληλοτομίας των ομόλογων ακτίνων μέσω της επιβολής της επιπολικής δέσμευσης. Η τελευταία αποτελεί την θεμελιώδη γεωμετρική σχέση μεταξύ των εικόνων ενός στερεοζεύγους και εκφράζεται μαθηματικά μέσω της γνωστής εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Η συνήθης πρακτική επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού βασίζεται στον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα **E** και την εν συνεχεία επίλυση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Τα στοιχεία του πίνακα **E** είναι μία γραμμική έκφραση των άγνωστων παραμέτρων της θέσης και της στροφής των εικόνων, και συνεπώς ο υπολογισμός του **E** δεν απαιτεί αρχικές τιμές για τους αγνώστους. Από τον **E** μπορούν σε δεύτερο στάδιο να εκτιμηθούν ο ζητούμενος πίνακας στροφής και η διεύθυνση του διανύσματος της βάσης, τιμές που χρησιμοποιούνται μετά ως αρχικές στην μη γραμμική επίλυση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Μολονότι τα αναφερθέντα βήματα είναι απλά στην υλοποίηση και στην πλειονότητα των περιπτώσεων οδηγούν σε ορθή λύση, η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως ιδιαίτερα ευαίσθητη στον θόρυβο των παρατηρήσεων, γεγονός που αποδίδεται κυρίως στην αλληλοεξάρτηση μεταξύ μετάθεσης και στροφής. Έτσι, στην βιβλιογραφία μελετώνται διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού που αποσκοπούν στον ξεχωριστό υπολογισμό της στροφής από την μετάθεση. Επιπλέον αντικείμενο διερεύνησης αποτελεί και η μελέτη διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος με στόχο την αξιολόγησή τους από πλευράς ακρίβειας και αποτελεσματικότητας, κυρίως σε κρίσιμες γεωμετρικές περιπτώσεις. Από την άλλη πλευρά, οι πανοραμικές εικόνες, που η χρήση τους τα τελευταία χρόνια αυξάνει ολοένα και περισσότερο, έρχονται μεταξύ άλλων να αντιμετωπίσουν και τα παραπάνω ζητήματα. Συγκεκριμένα, οι πανοραμικές εικόνες (ή ακόμα καλύτερα οι σφαιρικές εικόνες) αναφέρεται στην βιβλιογραφία ότι συμβάλλουν στην αύξηση της ακρίβειας και της σταθερότητας της λύσης του σχετικού προσανατολισμού λόγω της κάλυψης του χώρου σε όλες τις διευθύνσεις. Στο πλαίσιο που συνθέτουν όλες οι αναφερθείσες έννοιες εντάσσεται και η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, που στόχο έχει να διερευνήσει την συμπεριφορά διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού ζεύγους σφαιρικών εικόνων. Αναλυτικότερα, στην εργασία υλοποιήθηκαν επτά διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος για την μη γραμμική επίλυση του σχετικού προσανατολισμού και αξιολογήθηκαν με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων από σφαιρικές εικόνες. Η αξιολόγηση των συναρτήσεων έγινε ως προς πλήθος διαφορετικών παραγόντων ώστε να μελετηθεί η επίδραση καθενός από αυτούς στην επίλυση. Συγκεκριμένα, η συμπεριφορά των συναρτήσεων αξιολογήθηκε ως προς την επίδραση διαφορετικών επιπέδων θορύβου αλλά και υπό διαφορετικές συνθήκες γεωμετρίας (κατανομή και απόσταση σημείων από τις εικόνες, συμπεριλαμβανομένων σημείων στο άπειρο). Τέλος, με εκτέλεση πειραμάτων διερευνήθηκε η επίδραση των ίδιων των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού στην επίλυσή του, με απώτερο σκοπό την ανάδειξη της συμβολής της σφαιρικής γεωμετρίας στην ανάκτηση ειδικά των στροφών. Η υλοποίηση των συναρτήσεων έγινε στο MATLAB και η αξιολόγησή τους βασίστηκε στον ορισμό και τον υπολογισμό διαφορετικών μέτρων ακρίβειας.

School of Engineering

Department of Surveying & Geoinformatics Engineering

University of West Attica, Greece

Master of Science in Geospatial Technologies

Relative orientation of stereo-pairs of spherical images:

Implementation and evaluation of different cost functions

Kyparissi Stavroula

Master Thesis

November 2018

ABSTARCT

The relative orientation was and remains one of the most fundamental problems in the fields of both Photogrammetry and Computer Vision, as relative pose estimation between overlapping images is the key for various applications. Relative orientation solution establishes the intersection of corresponding image rays by enforcing the epipolar constraint. The later stands for the fundamental geometric constraint between the images of a stereo-pair and is mathematically expressed by the well-known coplanarity condition. The common approach for solving relative orientation problems is to first estimate the Essential matrix **E** and then solve the coplanarity equation. The elements of **E** represent a linear expression of the unknown rotation and translation parameters; hence, their estimation does not require initial values. The estimation of **E** allows extracting rotation and translation parameter values to be used as initial values in non-linear algorithms. Although these steps are simple to implement and in most cases lead to a correct solution, relative orientation is usually mentioned in literature as a problem extremely sensitive to noise, mainly due to the intertwining of rotation and translation parameters. In literature, many different approaches for solving the relative orientation problem have been proposed which focus on estimating rotation and translation independently. Moreover, different error criteria have been studied in terms of accuracy and efficiency mainly in critical or degenerate cases. Considering the above, many researchers have focused their attention on spherical images which are now increasingly used. It is claimed that spherical panoramas help improve the accuracy and stability of relative orientation solution thanks to the omnidirectional coverage of space. In this context, the main objective of this Master Thesis is to investigate the performance of various cost functions for the relative orientation of spherical images. Thus, seven non-linear error criteria have been implemented and evaluated using synthetic data of spherical images. The evaluation of the cost functions was conducted in terms of different levels of noise and under various geometric configurations (point distribution and their distances from the images, including points at infinity). Finally, many experiments were conducted to investigate the influence of the relative orientation parameter values

themselves with the aim of further clarifying the contribution of spherical geometry particularly in rotation estimation. For cost function implementation and experiments MATLAB was used and evaluation of the results was based on various quality measures.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

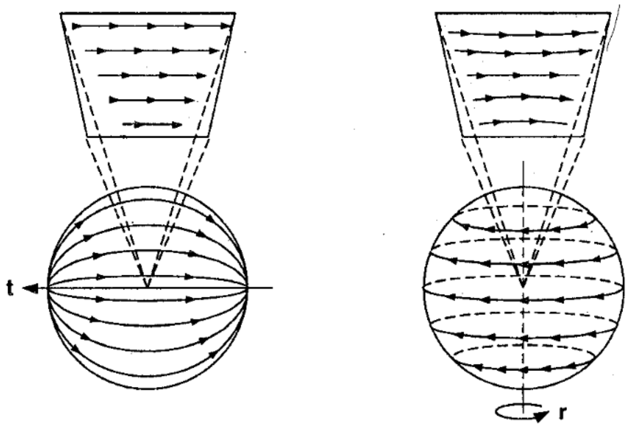
Γενικό πλαίσιο

Ο σχετικός προσανατολισμός αποτελούσε και εξακολουθεί να αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της Φωτογραμμετρίας και της Όρασης Υπολογιστών, καθώς η εύρεση της σχετικής θέσης δύο επικαλυπτόμενων εικόνων αποτελεί το κλειδί για πλήθος εφαρμογών. Ανάλογα με την εφαρμογή, ζητούμενο μπορεί να είναι η αποκατάσταση της επιπολικής γεωμετρίας του ζεύγους με στόχο την διευκόλυνση της εν συνεχεία εύρεσης ομόλογων σημείων, ο προσανατολισμός των εικόνων σε αυθαίρετο ή ορισμένο σύστημα αναφοράς αλλά και η τρισδιάστατη ανακατασκευή της απεικονιζόμενης σκηνής. Εκτός όμως από το τελικό ζητούμενο, αλλά και σε συνάρτηση βέβαια με αυτό, σημαντικό ρόλο παίζουν και άλλοι παράγοντες όπως η απαιτούμενη ακρίβεια αλλά και ο χρόνος εκτέλεσης του εκάστοτε αλγορίθμου. Έτσι, μπορεί η συνόρθωση δέσμης (*Bundle Adjustment*) να θεωρείται από πολλούς «*ο χρυσός κανόνας*» για τον προσανατολισμό εικόνων, στην πράξη όμως αποδεικνύεται ότι δεν είναι πάντα η καταλληλότερη μέθοδος για όλες τις εφαρμογές. Οι Stewenius et al. (2006) αναφέρουν βέβαια τη συνόρθωση δέσμης ως τη βέλτιστη διαδικασία προσανατολισμού εικόνων που θα πρέπει πάντα να υλοποιείται, ως τελικό στάδιο, στις περιπτώσεις όπου οι απαιτήσεις ακρίβειας είναι υψηλές. Οι εξισώσεις συγγραμμικότητας είναι όμως μη γραμμικές ως προς τα άγνωστα στοιχεία του προσανατολισμού των εικόνων, και έτσι η επίλυση απαιτεί προφανώς την ύπαρξη αρχικών τιμών για τους αγνώστους. Επιπλέον, η ποιότητα της τελικής λύσης εξαρτάται σημαντικά από την ποιότητα των προσεγγιστικών τιμών και μάλιστα κακή αρχική εκτίμηση μπορεί να οδηγήσει σε αδυναμία σύγκλισης της λύσης γενικώς (ή σε σύγκλιση σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος). Εκτός όμως από την ανάγκη για αρχικές τιμές, σημαντικό είναι επιπλέον το γεγονός ότι η μέθοδος της δέσμης χρησιμοποιεί τις (άγνωστες) τρισδιάστατες συντεταγμένες σημείων του χώρου για τον ορισμό των διευθύνσεων των οπτικών ακτίνων. Οι αρχικές τιμές επηρεάζουν επομένως πολύ περισσότερες άγνωστες παραμέτρους πέραν εκείνων του προσανατολισμού, δυσχεραίνοντας έτσι την επίλυση. Πέραν αυτού όμως, σημαντικό είναι επιπλέον εν προκειμένω ότι σημεία για τα οποία η επίλυση της εμπροσθοτομίας πρακτικά δεν είναι δυνατή (σημεία πολύ απομακρυσμένα από τις μηχανές) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην μέθοδο της δέσμης ή, εφόσον χρησιμοποιούνται, επηρεάζουν αρνητικά το αποτέλεσμα.

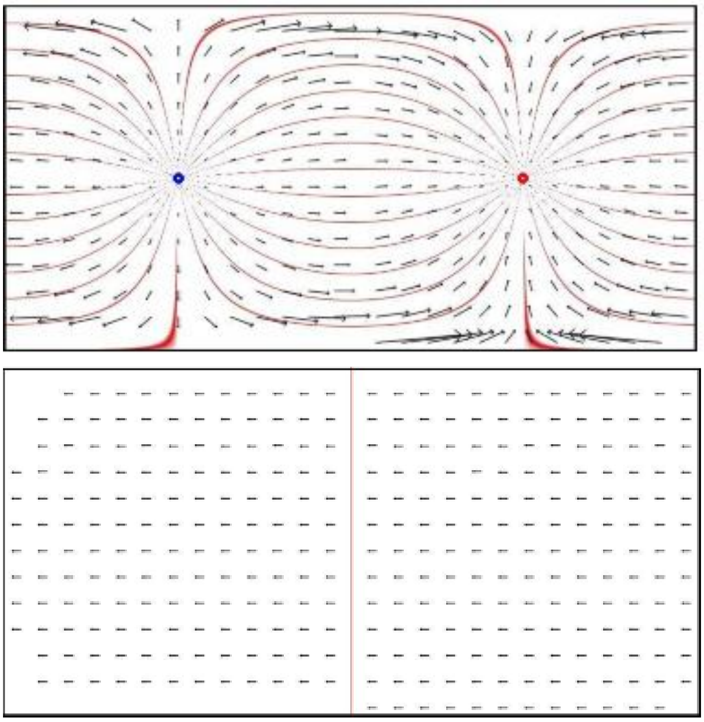
Έτσι, στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού γίνεται κατ' αρχήν συνηθέστερα μέσω της συνθήκης συνεπιπεδότητας αντί εκείνης της συγγραμμικότητας, και αυτό γιατί η πρώτη απλώς δεσμεύει τις ομόλογες ακτίνες ώστε να είναι συνεπίπεδες με το διάνυσμα της βάσης του στερεοζεύγους χωρίς δηλαδή να εμπλέκει τη θέση του σημείου στο χώρο. Υπό αυτή την έννοια η εξίσωση της συνεπιπεδότητας μπορεί να χρησιμοποιήσει ακόμη και σημεία του απείρου για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, κάτι που η εξίσωση της συγγραμμικότητας αδυνατεί να κάνει. Η συνθήκη συνεπιπεδότητας, η οποία αποτελεί και άμεση έκφραση της επιπολικής γεωμετρίας, έχει μελετηθεί εκτενώς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία από εργασίες που εξετάζουν διαφορετικές γραμμικές ή μη γραμμικές λύσεις, κρίσιμες περιπτώσεις ως προς το πλήθος και την κατανομή των διαθέσιμων ομόλογων σημείων αλλά και ως προς τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων.

Το κοινό σημείο όλων αυτών των, αρκετά διαφορετικών πολλές φορές εργασιών γύρω από την μελέτη του σχετικού προσανατολισμού εντοπίζεται στην αναγνώριση και την διαχείριση ζητημάτων κρίσιμων για την επίλυσή του, που συνοψίζονται στον τρόπο με τον οποίο ανακτώνται στην κλασική προσέγγιση η στροφή και η μετάθεση. Αναλυτικότερα, η συνήθης πρακτική υπολογισμού του Δεσμευμένου Επιπολικού Πίνακα (*Essential Matrix* - ***E***) εξαρχής «εμπλέκει» τις διαφορετικές παραμέτρους της κίνησης των εικόνων μέσα στα στοιχεία του **E**. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η σε δεύτερο στάδιο ανάκτηση της στροφής και της μετάθεσης από τον **E** δεν αποτελεί πρόβλημα και μπορεί να δώσει καλές αρχικές τιμές για τις μη γραμμικές επιλύσεις. Σε περιπτώσεις όμως όπου η κίνηση αφορά αποκλειστικά σε μετάθεση (purely translational motion) ή σε στροφή (purely rotational motion) η συνήθης πρακτική συναντά προβλήματα ή και αποτυγχάνει. Το βασικότερο πρόβλημα εντοπίζεται στην περίπτωση της μηδενικής μετάθεσης όπου προφανώς η επιπολική δέσμευση δεν μπορεί να δώσει λύση καθώς η εξίσωση συνεπιπεδότητας εκφυλίζεται. Στην βιβλιογραφία έχει προταθεί ο εντοπισμός τέτοιων περιπτώσεων και η αλλαγή του μαθηματικού μοντέλου επίλυσης (αντί της εξίσωσης συνεπιπεδότητας χρησιμοποιείται ο πίνακας της ομογραφίας που συνδέει τις δύο εικόνες) (*Scaramuzza & Siegwart, 2008*). Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και άλλες εργασίες όπου προτείνονται διαφορετικές εξισώσεις που περιγράφουν την επιπολική γεωμετρία και πετυχαίνουν τον ανεξάρτητο υπολογισμό της στροφής και της μετάθεσης (*Lim et al., 2010, Kneip et al., 2012, Kneip & Lynen, 2013, Briales et al. 2018*).

Από την άλλη πλευρά, ακόμα και όταν η κίνηση της μηχανής περιγράφεται από παραμέτρους και μετάθεσης όσο και στροφής, ο σχετικός προσανατολισμός αναφέρεται συχνά ως ένα ασταθές πρόβλημα με μεγάλη ευαισθησία στον θόρυβο των παρατηρήσεων, γεγονός που οφείλεται και πάλι στην αλληλοεξάρτηση μεταξύ των παραμέτρων της κίνησης. Έτσι, σε ορισμένες περιπτώσεις τελείως διαφορετικές κινήσεις της μηχανής μπορεί να επιδρούν με παρόμοιο τρόπο στην θέση των σημείων στις εικόνες. Με άλλα λόγια, αν μελετήσει κανείς την συμπεριφορά των ομόλογων σημείων από την μία εικόνα στην άλλη (δηλαδή το πώς μεταβάλλονται οι θέσεις τους στις εικόνες υπό την επίδραση κάποιας κίνησης της μηχανής), υπάρχει περίπτωση να μην μπορούν να ανακτηθούν με βεβαιότητα οι παράμετροι της κίνησης αυτής. Αναφορικά με το τελευταίο, χαρακτηριστική είναι πχ. η περίπτωση μικρής μετάθεσης παράλληλα στη βάση των εικόνων, η οποία υπάρχει κίνδυνος να εκτιμηθεί ως μικρή στροφή περί άξονα κάθετο στην διεύθυνση της μετάθεσης (*Svoboda et al., 1998*). Στο πρόβλημα αυτό θεωρείται πολύτιμη η συμβολή των πανοραμικών εικόνων, οι οποίες λόγω της καταγραφής σημείων σε όλες (θεωρητικά) τις διευθύνσεις του χώρου είναι σε θέση να διαχωρίσουν καλύτερα τις παραμέτρους τις κίνησης καθώς η φαινόμενη κίνηση των ομόλογων σημείων από εικόνα σε εικόνα είναι διαφορετική στην περίπτωση της στροφής και διαφορετική στην περίπτωση της μετάθεσης (*Εικόνα 1, Εικόνα 2*).



Εικόνα 1: Η αλληλοεξάρτηση στροφής και μετάθεσης στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων και το πλεονέκτημα της σφαιρικής γεωμετρίας. Αριστερά παρουσιάζεται το μοτίβο που ακολουθεί η οπτική ροή υπό την επίδραση μόνο μετάθεσης στο επίπεδο και στη σφαίρα. Δεξιά παρουσιάζεται το αντίστοιχο μοτίβο υπό την επίδραση μόνο στροφής. Στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων τα μοτίβα που δημιουργούνται υπό την επίδραση μετάθεσης και στροφής διαφοροποιούνται ελάχιστα μεταξύ τους. Αντίθετα, στην επιφάνεια της σφαίρας διαφοροποιούνται σημαντικά μεταξύ τους, ειδικά αν παρατηρήσει κανείς ότι στην περίπτωση της μετάθεσης η φορά των διανυσμάτων αλλάζει από το ένα ημισφαίριο στο άλλο (Gluckman & Nayar, 1998).



Εικόνα 2: Η διάταξη των διανυσμάτων της οπτικής ροής για σφαιρικές εικόνες υπό την επίδραση μόνο μετάθεσης (πάνω) και μόνο στροφής (κάτω) προβεβλημένο μέσω της ορθής ισαπέχουσας κυλινδρικής προβολής. Στην περίπτωση της μετάθεσης είναι εμφανής η αλλαγή της φοράς των διανυσμάτων για το ένα και το άλλο ημισφαίριο καθώς αυτά πάντα κατευθύνονται από τον ένα πόλο στον άλλο (Pathak et al., 2016).

Τα προηγηθέντα αποτελούν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που εξηγεί εκείνο που συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία: η χρήση των σφαιρικών εικόνων συμβάλλει στην αύξηση της ακρίβειας και την σταθερότητας της λύσης του σχετικού προσανατολισμού. Ενδεικτικά, οι Kang & Szeliski (1997) επισημαίνουν ότι η αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να γίνει με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια σε πανοραμικές εικόνες σε σύγκριση με τις συμβατικές εικόνες ακριβώς λόγω του ότι μια σφαιρική μηχανή καταγράφει σημεία προς όλες τις διευθύνσεις. Αυτό αποτελεί και έναν από τους βασικούς λόγους της ολοένα αυξανόμενης χρήσης πανοραμικών εικόνων σε πλήθος εφαρμογών της φωτογραμμετρίας, της όρασης υπολογιστών και της ρομποτικής. Προφανώς η αύξηση της ακρίβειας, αν και είναι ένας από τους σημαντικότερους λόγους, δεν είναι ο μοναδικός. Η εύκολη πλέον πρόσβαση σε πανοραμικά δεδομένα, που είτε προέρχονται από την βάση δεδομένων της Google (Google Street) είτε λαμβάνονται απευθείας με μια από τις διαδεδομένες σφαιρικές μηχανές που κυκλοφορούν στο εμπόριο, έδωσε ένα επιπλέον κίνητρο στους ερευνητές να ασχοληθούν με τις δυνατότητες αξιοποίησής τους. Τέλος, η κάλυψη του χώρου προς όλες τις διευθύνσεις με μια μόνο εικόνα είναι προφανές ότι μειώνει σημαντικά τον αριθμό των εκάστοτε χρησιμοποιούμενων εικόνων και άρα και τους απαιτούμενους χρόνους επεξεργασίας. Θα μπορούσε να υποστηριχθεί λοιπόν ότι, σε όλες τις συνήθεις φωτογραμμετρικές εφαρμογές, παρατηρείται τα τελευταία χρόνια μια τάση μετάβασης από τις συμβατικές εικόνες στις πανοραμικές, γεγονός που δίνει κίνητρο για περαιτέρω διερεύνηση των δυνατοτήτων αυτών των εικόνων και ανάπτυξη αλγορίθμων προσαρμοσμένων σε αυτές. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και η παρούσα διπλωματική εργασία που αφορά στην επίλυση του θεμελιώδους προβλήματος του σχετικού προσανατολισμού ζεύγους σφαιρικών εικόνων και στην αξιολόγηση της ακρίβειας που μπορεί να επιτευχθεί υπό την επίδραση διαφορετικών παραμέτρων.

Στόχος της εργασίας

Στο πλαίσιο αυτό, στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι να διερευνήσει θέματα που άπτονται του σχετικού προσανατολισμού υπό το πρίσμα της γεωμετρίας των σφαιρικών εικόνων. Όπως προαναφέρθηκε, θεωρώντας τον σχετικό προσανατολισμό ως θεμελιώδη φωτογραμμετρική διαδικασία και αναγνωρίζοντας το ολοένα αυξανόμενο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για τις πανοραμικές εικόνες, η εργασία επικεντρώνεται στην εξέταση κρίσιμων περιπτώσεών του κυρίως από την πλευρά της γεωμετρίας, αξιοποιώντας τις δυνατότητες που απορρέουν από την χρήση των σφαιρικών εικόνων.

Αναλυτικότερα, διερευνώνται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού αν χρησιμοποιηθούν διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος στην μη γραμμική λύση, οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις την κλασικής εξίσωσης συνεπιπεδότητας αλλά και της επιπολικής γεωμετρίας γενικότερα. Συγκεκριμένα, εξετάζονται συνολικά επτά διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, δύο εκ των οποίων είναι ευρέως διαδεδομένες για χρήση και σε συμβατικές εικόνες (Gold Standard και Sampson Distance, βλ. *Hartley & Zisserman, 2000*). Επιπλέον, εκτός από την κλασική εξίσωση συνεπιπεδότητας, εξετάζονται τρεις ακόμα παραλλαγές της, στις οποίες εκφράζεται διαφορετικά το σφάλμα κλεισίματος της εξίσωσης προκειμένου να επιδέχεται γεωμετρική ερμηνεία και να αντιστοιχεί σε μια φυσική ποσότητα, κατάλληλη για την σφαιρική γεωμετρία των πανοραμικών εικόνων (*Pagani & Stricker, 2011).* Τέλος, εξετάζεται μια νέα συνάρτηση σφάλματος που προκύπτει μέσω της διαφορετικής μαθηματικής έκφρασης της επιπολικής δέσμευσης ομόλογων ακτίνων. Οι διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, αν και αποτελούν όλες μαθηματικές εκφράσεις της ίδιας γεωμετρικής δέσμευσης και πρακτικά εκφράζουν την απόκλιση ανά δύο των ομόλογων ακτίνων από την επιπολική δέσμευση, φαίνεται να έχουν διαφορετική συμπεριφορά και διαφορετικές επιδόσεις όσον αφορά την ακρίβεια υπό διαφορετικές συνθήκες γεωμετρίας και θορύβου (*Fathy et al., 2017*). Έτσι, όλες οι παραπάνω συναρτήσεις σφάλματος μελετώνται υπό την επίδραση διαφορετικών επιπέδων θορύβου αλλά και διαφορετικών γεωμετρικών συνθηκών, ενώ μεταβάλλεται το πλήθος των ομόλογων σημείων, η κατανομή τους στο χώρο και οι αποστάσεις τους από τα σημεία λήψης. Στο σημείο αυτό ακριβώς αξιοποιούνται οι σφαιρικές εικόνες μέσω των οποίων δίνεται η δυνατότητα για εξέταση περισσότερων κατανομών σημείων στο χώρο από ό,τι θα ήταν εφικτό αν χρησιμοποιούνταν συμβατικές εικόνες. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η περίπτωση πλήρους κατανομής σημείων (δηλαδή σημείων σε όλες τις διευθύνσεις) αλλά και η περίπτωση όπου τα σημεία βρίσκονται κοντά στους πόλους του στερεοζεύγους.

Για την υλοποίηση των παραπάνω πειραμάτων δημιουργήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν προσομοιωμένα δεδομένα ώστε η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων να μπορεί να γίνει και με βάση τις αληθείς τιμές των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού. Όλα τα στάδια, από την δημιουργία των δεδομένων και την προσθήκη θορύβου σε αυτά, την εκτίμηση αρχικών τιμών για τους αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού έως και το τελικό στάδιο της ελαχιστοτετραγωνικής επίλυσης των επτά διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος, υλοποιήθηκαν μέσω σειράς συναρτήσεων στο περιβάλλον του MATLAB. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων έγινε μέσω του ορισμού διαφορετικών μέτρων ποιότητας και ακρίβειας για την κάθε λύση, ενώ για την παρουσίασή τους δημιουργήθηκε σειρά διαγραμμάτων.

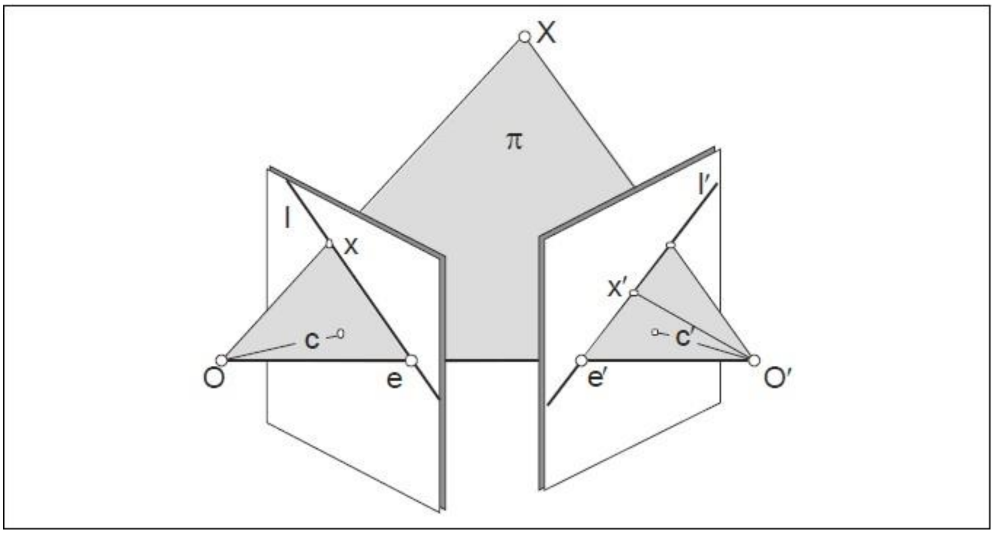
Δομή της εργασίας

Τα προαναφερθέντα περιγράφονται στα επόμενα, διαρθρωμένα σε έξι επιμέρους κεφάλαια. Στο **Κεφάλαιο 1** περιλαμβάνεται το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο σχετικά με τη γεωμετρία του στερεοζεύγους. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στο μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας και την έννοια του σχετικού προσανατολισμού. Περιγράφεται η συνήθης διαδικασία αποκατάστασης του σχετικού προσανατολισμού δύο συμβατικών επικαλυπτόμενων εικόνων, με αφετηρία την έννοια του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (*Essential Matrix* - ***E***) και τον υπολογισμό των στοιχείων του ώστε να προκύψουν οι αρχικές τιμές των άγνωστων παραμέτρων. Για την αρχική εκτίμηση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα περιγράφεται η γραμμική μέθοδος επίλυσης μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών (*Singular Value Decomposition – SVD*) και στη συνέχεια η διαδικασία εξαγωγής του πίνακα στροφής και του διανύσματος μετάθεσης από τα στοιχεία του **E**. Στο σημείο αυτό, γίνεται αναφορά στα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν, λόγω της δυσκολίας ορθού διαχωρισμού στροφής και μετάθεσης σε ορισμένες περιπτώσεις, και σε εναλλακτικές προσεγγίσεις που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία για την εκτίμηση στροφής και μετάθεσης σε δύο διακριτά και ανεξάρτητα στάδια. Τέλος, περιγράφεται αναλυτικά το μοντέλο της εξίσωσης συνεπιπεδότητας και η διαδικασία της μη γραμμικής επίλυσης για την τελική εκτίμηση των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού. Το **Κεφάλαιο 2** αφορά στις σφαιρικές εικόνες, με έμφαση στο γεωμετρικό μοντέλο που τις περιγράφει και στις διαφορές και ομοιότητές του με το μοντέλο της κεντρικής προβολής των συμβατικών εικόνων. Κατά την περιγραφή του σφαιρικού γεωμετρικού μοντέλου γίνεται παράλληλα μια προσπάθεια να επισημανθούν και να αιτιολογηθούν τα πλεονεκτήματα των πανοραμικών εικόνων που αναφέρονται στην βιβλιογραφία. Τέλος, με αφορμή την ολοένα αυξανόμενη χρήση πανοραμικών εικόνων, γίνεται μια σύντομή βιβλιογραφική αναφορά στις κύριες εφαρμογές που χρησιμοποιούν πανοραμικές εικόνες. Σημειώνεται ότι η σκοπιά από την οποία εξετάζονται στην παρούσα εργασία τα πανοράματα είναι κυρίως αυτή της γεωμετρίας, και για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο κεφάλαιο δεν αναλύει σε βάθος τα στάδια που αφορούν την δημιουργία και αποθήκευση των πανοραμάτων. Το **Κεφάλαιο 3** αφορά τις συναρτήσεις σφάλματος για την μη γραμμική επίλυση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Αρχικά επιχειρείται η ερμηνεία του σφάλματος κλεισίματος της εξίσωσης της συνεπιπεδότητας μέσω των εννοιών του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι επιμέρους συναρτήσεις σφάλματος που υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας. Για κάθε μια από αυτές δίνεται η μαθηματική εξίσωση που την περιγράφει αλλά και η γεωμετρική ερμηνεία της ποσότητας που ελαχιστοποιείται στη συνόρθωση. Επιπλέον γίνεται αναφορά και σε άλλες συναρτήσεις σφάλματος που αναφέρονται στην βιβλιογραφία, καθώς και στην συγκριτική τους αξιολόγηση με βάση ήδη δημοσιευμένες εργασίες, και αφορούν είτε σε συμβατικές είτε σε πανοραμικές εικόνες. Στο **Κεφάλαιο 4** γίνεται περιγραφή του αλγορίθμου που συντάχθηκε για τις ανάγκες των πειραμάτων, εξηγώντας αναλυτικά όλα τα επιμέρους στάδια και τις διαδικασίες που υλοποιήθηκαν και δίνοντας όπου κρίνεται σκόπιμο το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο. Συγκεκριμένα, περιγράφεται η διαδικασία δημιουργίας των τεχνητών δεδομένων (δύο σφαιρικές εικόνες και σημεία του χώρου) και ο τρόπος με τον οποίο έγινε η προσθήκη θορύβου στα δεδομένα. Στη συνέχεια συνοψίζονται τα βήματα για την γραμμική εκτίμηση του **E** και επισημαίνονται οι διαφορές από τη συνήθη διαδικασία λόγω της χρήσης των σφαιρικών εικόνων. Έπειτα περιγράφεται η διαδικασία εύρεσης του ορθού συνδυασμού πίνακα στροφής και μετάθεσης για σφαιρικές εικόνες ώστε να προκύψουν οι απαιτούμενες αρχικές τιμές για την μη γραμμική επίλυση. Τέλος, παρατίθενται οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στις μη γραμμικές λύσεις των συναρτήσεων σφάλματος και περιγράφονται αναλυτικά όλα τα μέτρα ακρίβειας που χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Στο **Κεφάλαιο 5** γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων, αφού πρώτα δοθούν όλες οι βασικές παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν. Συνοπτικά τα πειράματα που έγιναν διακρίνονται σε τέσσερεις βασικές κατηγορίες: πειράματα για την αξιολόγηση της επίδρασης του θορύβου, πειράματα για την διερεύνηση της επίδρασης της γεωμετρίας των εικόνων, πειράματα που αφορούν την σταθερότητα της λύσης ως προς τις αρχικές τιμές των παραμέτρων και τέλος πειράματα σχετικά με την επίδραση των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού. Στο **Κεφάλαιο 6**, με το οποίο και ολοκληρώνεται η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των αποτελεσμάτων, γίνεται μια σύντομη επισκόπηση του συνόλου της διαδικασίας και, τέλος, διατυπώνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και εμβάθυνση στο μέλλον.

1

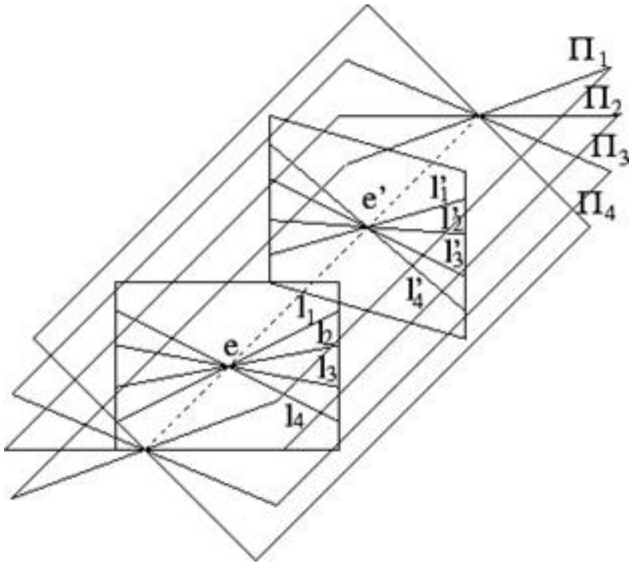
Επιπολική γεωμετρία στερεοζεύγους

Η επιπολική γεωμετρία αποτελεί θεμελιώδη έννοια της φωτογραμμετρίας και περιγράφει την γεωμετρική σχέση μεταξύ δύο επικαλυπτόμενων εικόνων. Στον πυρήνα της βρίσκεται μία γεωμετρική δέσμευση στην οποία οφείλουν να υπακούουν τα ομόλογα διανύσματα και συνοψίζεται στο ότι αυτά θα πρέπει να είναι συνεπίπεδα με το διάνυσμα της βάσης του στερεοζεύγους. Η παραπάνω δέσμευση, γνωστή στα πεδία της φωτογραμμετρίας και της όρασης υπολογιστών ως *επιπολική δέσμευση* (*epipolar constraint*) ή *δέσμευση συνεπιπεδότητας* (*coplanarity constraint*), αποτελεί την βάση για την εξαγωγή της ζητούμενης τρισδιάστατης πληροφορίας από τις εικόνες.



Εικόνα 3: Το μοντέλο τη επιπολικής γεωμετρίας (Καλησπεράκης, 2010).

Προκειμένου να γίνει κατανοητό το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας ας θεωρηθούν δύο εικόνες με σημεία λήψης τα O και O′ αντίστοιχα (Εικόνα 3). Για κάθε σημείο X του χώρου που απεικονίζεται στις δύο εικόνες, ορίζονται δύο ομόλογες ακτίνες, οι **OX** και **O′X**, που τέμνουν τα επίπεδα των εικόνων στα σημεία **x** και **x′**, αντίστοιχα. Το επίπεδο **π**, που ορίζεται από τις δύο ομόλογες ακτίνες και τη βάση **B** (**OO′**) του στερεοζεύγους, ονομάζεται επιπολικό επίπεδο. Αντίστοιχα, τα ίχνη των επιπολικών επιπέδων πάνω στα επίπεδα των εικόνων ονομάζονται επιπολικές ευθείες. Τέλος, η βάση **B** του στερεοζεύγους τέμνει τα επίπεδα των εικόνων στους αντίστοιχους πόλους **e** και **e**. Με δεδομένο ότι κάθε ζεύγος ομόλογων σημείων ορίζει ένα επιπολικό επίπεδο το οποίο εξ ορισμού περιλαμβάνει την βάση του στερεοζεύγους, το σύνολο των σημείων του χώρου που απεικονίζεται στις δύο εικόνες ορίζει μία δέσμη επιπολικών επιπέδων, αξονική ως προς τη βάση **B** του στερεοζεύγους (Εικόνα 4). Επιπλέον, αφού κάθε επιπολικό επίπεδο ορίζει ένα ζεύγος ομόλογων επιπολικών ευθειών, η δέσμη των επιπολικών επιπέδων ορίζει με τη σειρά της στις δύο εικόνες δύο ομόλογες επίπεδες δέσμες επιπολικών ευθειών με κορυφές τους πόλους, οι οποίες είναι μεταξύ τους προβολικές (Καλησπεράκης, 2010).



Εικόνα 4: Η δέσμη επιπολικών επιπέδων, αξονική ως προς τη βάση του στερεοζεύγους (Καλησπεράκης, 2010).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η τρισδιάστατη επιπολική γεωμετρία είναι η βασική δέσμευση που απορρέει από την ύπαρξη δύο διαφορετικών σημείων λήψης και αφορά την σχέση δύο ομόλογων ακτίνων με το διάνυσμα της βάσης του στερεοζεύγους, τα οποία θα πρέπει να είναι συνεπίπεδα. Από την άλλη πλευρά, η δισδιάστατη επιπολική γεωμετρία αφορά στην σχέση δύο ομόλογων σημείων τα οποία οφείλουν να κείνται επί δύο ομόλογων επιπολικών ευθειών στο επίπεδο κάθε εικόνας. Με άλλα λόγια, για ένα σημείο **x** στην αριστερή εικόνα που κείται επί της επιπολικής γραμμής **l**, το ομόλογό του, **x′**, θα κείται επί της επιπολικής **l′** στο επίπεδο της δεξιάς εικόνας. Η παραπάνω δέσμευση είναι εξαιρετικά χρήσιμη στο στάδιο της συνταύτισης σημείων καθώς η αναζήτηση του ομόλογου σημείου περιορίζεται κατά μήκος της ομόλογης επιπολικής ευθείας.

Η δυνατότητα ορισμού του μοντέλου της δισδιάστατης ή της τρισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας εξαρτάται από το εάν είναι γνωστή ή όχι η εσωτερική γεωμετρία των μηχανών. Έτσι, εάν είναι γνωστή η εσωτερική γεωμετρία των μηχανών τότε καθίσταται εφικτή η ανάπλαση του σχήματος της δέσμης κάθε μίας εικόνας και άρα μπορούν να οριστούν οι ομόλογες οπτικές ακτίνες και τα επιπολικά επίπεδα. Από την άλλη πλευρά, αν δεν έχει αποκατασταθεί ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων, ορίζεται το μοντέλο της δισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας που περιγράφει την γεωμετρική σχέση μεταξύ δύο επίπεδων δεσμών ευθειών (των επιπολικών ευθειών), επιτρέποντας τον ορισμό των θέσεων των πόλων.

Σχετικός προσανατολισμός

Ο σχετικός προσανατολισμός μπορεί να οριστεί ως η μαθηματική διατύπωση της επιπολικής γεωμετρίας και αποτελεί μια βασική φωτογραμμετρική διαδικασία, καθώς η αποκατάστασή του είναι απαραίτητη για την εξαγωγή τρισδιάστατης πληροφορίας από ένα στερεοζεύγος. Στόχος του σχετικού προσανατολισμού είναι η εύρεση της θέσης και της στροφής που είχαν οι δύο εικόνες κατά την στιγμή της λήψης. Προφανώς, ο προσανατολισμός των εικόνων μπορεί να οριστεί μόνο ως προς ένα αυθαίρετο σύστημα αναφοράς, καθώς ο προσδιορισμός της θέσης και της στροφής τους ως προς το πραγματικό σύστημα του χώρου απαιτεί επιπλέον εξωτερική πληροφορία για το σύστημα αυτό. Έτσι, αυτό που προσδιορίζεται μέσω του σχετικού προσανατολισμού είναι η σχετική θέση και στροφή των δύο εικόνων η οποία συνδέεται με την πραγματική τους θέση και στροφή στο σύστημα του χώρου μέσω ενός 3D μετασχηματισμού 7 παραμέτρων (μετασχηματισμός ομοιότητας). Ο υπολογισμός της σχετικής θέσης και στροφής των δύο εικόνων που επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού συνεπάγεται την αποκατάσταση της αλληλοτομίας των ομόλογων ακτίνων και άρα την αποκατάσταση του μοντέλου της επιπολικής γεωμετρίας. Με πιο απλά λόγια, μετά την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού αίρεται η ασυμβατότητα των ομόλογων ακτίνων και εξασφαλίζεται ότι αυτές τέμνονται σε ένα σημείο του χώρου.

Η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού προϋποθέτει την γνώση της εσωτερικής γεωμετρίας των μηχανών και συνεπώς κάθε μία εικόνα αντιστοιχεί σε μία δέσμη οπτικών ακτίνων στο χώρο, διερχόμενων από το σημείο λήψης. Η θέση κάθε δέσμης στο χώρο περιγράφεται από 6 παραμέτρους που αντιστοιχούν σε 3 στροφές και στις 3 καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου λήψης. Άρα, η θέση δύο εικόνων στο χώρο περιγράφεται συνολικά από 12 παραμέτρους, οι οποίες αντιστοιχούν στους εξωτερικούς προσανατολισμούς των εικόνων και στην φωτογραμμετρική πρακτική προσδιορίζονται ή μέσω της επίλυσης δύο ανεξάρτητων εξωτερικών προσανατολισμών ή μέσω της επίλυσης του απόλυτου προσανατολισμού (7 παράμετροι που αντιστοιχούν στον μετασχηματισμό που συνδέει το σύστημα του στερεομοντέλου με το σύστημα του χώρου), μετά την αποκατάσταση του σχετικού, ο οποίος ορίζεται από 5 παραμέτρους. Πράγματι, αν η μία εκ των δύο εικόνων θεωρηθεί σταθερή, παραδοχή που ισοδυναμεί με τον αυθαίρετο ορισμό του συστήματος αναφοράς του χώρου, τότε οι 12 άγνωστες παράμετροι μειώνονται σε 6. Από τις 6 αυτές παραμέτρους, οι 5 αντιστοιχούν στους αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού και η έκτη δεσμεύεται αυθαίρετα λόγω της αδυναμίας προσδιορισμού της κλίμακας του μοντέλου. Η αβεβαιότητα της κλίμακας απορρέει από τον ορισμό του προβλήματος του σχετικού προσανατολισμού και οφείλεται στο ότι σε δύο ομόλογες ακτίνες μπορεί να επιβληθεί η δέσμευση να είναι συνεπίπεδες με την βάση όποιο και αν είναι το μήκος αυτής. Έτσι, από την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού υπολογίζονται οι σχετικές στροφές της μίας εικόνας ως προς την άλλη και η διεύθυνση της βάσης. Συνεπεία αυτού η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού επιτρέπει την ανάπλαση του σχήματος των στοιχείων του απεικονιζόμενου χώρου σε ένα σύστημα (σύστημα του στερεομοντέλου) με αυθαίρετη θέση, προσανατολισμό και κλίμακα ως προς το πραγματικό σύστημα του χώρου.

Όπως προαναφέρθηκε, οι άγνωστοι του σχετικού προσανατολισμού είναι 5 από το σύνολο των 12 παραμέτρων των εξωτερικών προσανατολισμών των δύο εικόνων. Η συνήθης πρακτική είναι η επίλυση του εξαρτημένου σχετικού προσανατολισμού που συνίσταται στην ταύτιση του συστήματος αναφοράς του στερεομοντέλου με το σύστημα της αριστερής εικόνας. Το τελευταίο πρακτικά ισοδυναμεί με την ταύτιση της αφετηρίας του συστήματος με το προβολικό κέντρο της αριστερής εικόνας και την ταύτιση του προσανατολισμού των αξόνων του συστήματος του στερεομοντέλου με τους άξονες του συστήματος της αριστερής εικόνας. Η άρση της αβεβαιότητας της κλίμακας γίνεται με το να θέσει κανείς την μια συνιστώσα της βάσης **B**, συνήθως την b_x που είναι η μεγαλύτερη, ίση με τη μονάδα. Για την υλοποίηση αυτού αρκεί η διαίρεση των δύο άλλων συνιστωσών της βάσης με την b_x. Εναλλακτικά, αντί της εξίσωσης της πρώτης συνιστώσας με τη μονάδα, μπορεί να δεσμευτεί το μέτρο του διανύσματος της βάσης (πχ. ίσο με τη μονάδα χωρίς περιορισμό της γενικότητας), περίπτωση που όμως συναντάται σπανιότερα.

Με δεδομένο ότι αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού αφορά την αποκατάσταση της αλληλοτομίας των ομόλογων ακτίνων ή ισοδύναμα την αποκατάσταση της επιπολικής γεωμετρίας του ζεύγους, για την επίλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση της συνεπιπεδότητας:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{x_1} \times \mathbf{x_2}) = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

όπου $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$ οι ομογενείς συντεταγμένες των ομόλογων σημείων και **B** το διάνυσμα της βάσης στο σύστημα του στερεομοντέλου (που ταυτίζεται με το σύστημα αναφοράς της αριστερής εικόνας).

Εναλλακτικά, για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι εξισώσεις συγγραμμικότητας καθώς και εκείνες επιβάλλουν την αλληλοτομία των ομόλογων ακτίνων. Ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων είναι ότι η συνθήκη συνεπιπεδότητας επιβάλλει μόνο ότι οι ομόλογες ακτίνες οφείλουν να μην είναι ασύμβατες και άρα να τέμνονται σε ένα σημείο του χώρου, ενώ η συνθήκη συγγραμμικότητας εμπλέκει στις εξισώσεις και τις συντεταγμένες του σημείου αυτού, αυξάνοντας έτσι τον αριθμό των αγνώστων καθοριστικών παραμέτρων του προβλήματος. Το τελευταίο, εκτός του ότι απαιτεί την επίλυση ενός προβλήματος μεγαλύτερων διαστάσεων, καθιστά και αδύνατη τη χρήση ομόλογων σημείων για τα οποία δεν είναι δυνατή η επίλυση της εμπροσθοτομίας (όπως συμβαίνει στην περίπτωση των σημείων του απείρου).

Ανακεφαλαιώνοντας, ο σχετικός προσανατολισμός είναι η διαδικασία μέσω της οποίας αποκαθίσταται το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας ενός στερεοζεύγους που έχει προκύψει από μηχανές γνωστής εσωτερικής γεωμετρίας. Η επίλυσή του καταλήγει στην εύρεση του προσανατολισμού και της σχετικής θέσης υπό κλίμακα της δεξιάς εικόνας ως προς την αριστερή, με την παραδοχή ότι το σύστημα του στερεομοντέλου ταυτίζεται με το σύστημα της αριστερής εικόνας. Με δεδομένο ότι βασικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι οι σφαιρικές εικόνες θα πρέπει να επισημανθεί ότι το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας και η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού που περιγράφηκαν παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση των πανοραμάτων. Συγκεκριμένα, στις πανοραμικές εικόνες όπως και στις συμβατικές αυτό που ορίζεται είναι μία δέσμη οπτικών ακτίνων, ενώ εκείνο που τις διαφοροποιεί είναι το γεωμετρικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για τον ορισμό της δέσμης. Έτσι, υπό αυτήν την έννοια, το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας που αφορά την σχετική θέση των ομόλογων ακτίνων ισχύει και στις δύο περιπτώσεις με ορισμένες μόνο διαφοροποιήσεις. Αυτές, μαζί με τα στοιχεία της γεωμετρίας των σφαιρικών εικόνων, περιγράφονται αναλυτικά στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Γραμμική επίλυση (Δεσμευμένος επιπολικός πίνακας)

Μέχρι το σημείο αυτό έχουν περιγραφεί οι έννοιες της επιπολικής γεωμετρίας και του σχετικού προσανατολισμού ενός στερεοζεύγους. Η εύρεση των 5 άγνωστων παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού μέσω της εξίσωσης συνεπιπεδότητας συνιστά προφανώς ένα μη γραμμικό πρόβλημα για την επίλυση του οποίου απαιτείται η εκτίμηση αρχικών τιμών μέσω γραμμικών αλγορίθμων.

Γενικά, η κεντρική ιδέα γύρω από την ανάπτυξη των γραμμικών αλγορίθμων βασίζεται στην διατύπωση ενός πίνακα 3x3, από τα στοιχεία του οποίου μπορούν να προκύψουν σε δεύτερο στάδιο οι ζητούμενες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού, ώστε να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές στις μη γραμμικές λύσεις. Για λόγους πληρότητας θα πρέπει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση συμβατικών εικόνων από μηχανές άγνωστης εσωτερικής γεωμετρίας ο οριζόμενος πίνακας είναι ο Επιπολικός Πίνακας (*Fundamental Matrix* - **F**). Ο **F** περιγράφει το μοντέλο της δισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας καθώς δεν είναι δυνατόν να οριστούν οι δύο δέσμες των οπτικών ακτίνων. Μολονότι μέσω της δισδιάστατης επιπολικής γεωμετρίας δεν είναι δυνατή η ευκλείδεια ανακατασκευή του απεικονιζόμενου χώρου, ο υπολογισμός του πίνακα **F** επιτρέπει την προβολική ανακατασκευή του, από την οποία ναι μεν δεν μπορεί να εξαχθεί μετρική πληροφορία (καθώς η μέτρηση αποστάσεων και γωνιών δεν έχει κανένα φυσικό νόημα) αλλά δεν παύει να είναι χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές. Συγκεκριμένα, μέσω της εκτίμησης του **F** μπορεί να αντληθεί γεωμετρική πληροφορία για την συνεπιπεδότητα, την συγγραμμικότητα ή τον διπλό λόγο ευθειών, στοιχεία τα οποία μπορεί να φανούν χρήσιμα σε εφαρμογές τεχνητής νοημοσύνης και ρομποτικής όπως είναι η πλοήγηση συστημάτων και η αναγνώριση αντικειμένων (*Zhang, 1996*). Από την άλλη πλευρά, όταν η εσωτερική γεωμετρία είναι γνωστή, τότε ο πίνακας που περιγράφει την γεωμετρία του στερεοζεύγους ονομάζεται Δεσμευμένος Επιπολικός Πίνακας (*Essential Matrix* – **E**) και από τα στοιχεία του μπορούν να προκύψουν οι άγνωστες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού.

Συνεπώς, ο **E** αποτελεί μία γραμμική έκφραση των παραμέτρων της σχετικής θέσης των δύο εικόνων και προκύπτει μέσω κατάλληλης παραμετροποίησης της εξίσωσης συνεπιπεδότητας:

$$\mathbf{x_1^T} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{x_2}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x_1^T} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{R}\mathbf{x}_2') = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x_1^T} \cdot [\mathbf{B}]_\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x}_2' = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x_1^T}\mathbf{E}\mathbf{x}_2' = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

όπου, $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$ οι ομογενείς συντεταγμένες των ομόλογων σημείων στο σύστημα αναφοράς της αριστερής εικόνας, **B** το διάνυσμα της βάσης του στερεοζεύγους, **R** ο πίνακας στροφής της δεξιάς εικόνας ως προς την αριστερή και $\mathbf{x_2'}$ οι ομογενείς συντεταγμένες των ομόλογων σημείων στο σύστημα αναφοράς της δεξιάς εικόνας.

Στην εξίσωση (1.2) ορίζεται ο πίνακας **E** αν εκφραστεί το εξωτερικό γινόμενο που εμφανίζεται στην σχέση μέσω ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Συγκεκριμένα, αν το εξωτερικό γινόμενο της βάσης με την ακτίνα σημείου της δεξιάς εικόνας εκφραστεί μέσω του εσωτερικού γινομένου του αντισυμμετρικού πίνακα της βάσης με τον πίνακα στροφής της δεξιάς εικόνας, τότε προκύπτει:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}]_\mathbf{x} \cdot \mathbf{R} \tag{1.3}$$

Έτσι, ενώ η εξίσωση συνεπιπεδότητας αποτελεί μία μη γραμμική σχέση, στην εξίσωση 1.2 οι παρατηρούμενες ποσότητες (δηλαδή οι συντεταγμένες των ομόλογων σημείων) αναπτύσσονται γραμμικά ως προς τα άγνωστα στοιχεία e_{ij} του πίνακα **E**, και ως εκ τούτου δεν υπάρχει απαίτηση για αρχικές τιμές:

$$\mathbf{x_1^T E x_2'} = 0 \rightarrow [\mathrm{x_1} \quad \mathrm{y_1} \quad 1]\begin{bmatrix} \mathrm{e_{11}} & \mathrm{e_{12}} & \mathrm{e_{13}} \\ \mathrm{e_{21}} & \mathrm{e_{22}} & \mathrm{e_{23}} \\ \mathrm{e_{31}} & \mathrm{e_{32}} & \mathrm{e_{33}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x_2} \\ \mathrm{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \tag{1.4}$$

$$\mathrm{x_2 x_1 e_{11} + x_2 y_1 e_{21} + x_2 e_{31} + y_2 x_1 e_{12} + y_2 y_1 e_{22} + y_2 e_{32} + x_1 e_{13} + y_1 e_{23} + e_{33}} = 0 \tag{1.5}$$

Ο πιο διαδεδομένος αλγόριθμος για την επίλυση της εξίσωσης 1.5 είναι ο αλγόριθμος των 8-σημείων (8-point algorithm), ο οποίος περιγράφεται ακολούθως και είναι και αυτός που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της εργασίας για την εκτίμηση των απαιτούμενων αρχικών τιμών. Η ονομασία του αλγορίθμου προέρχεται από το πλήθος των ελάχιστα απαιτούμενων σημείων για τον υπολογισμό των στοιχείων του **E** που ισούται με 8. Με άλλα λόγια απαιτούνται 8 εξισώσεις και αυτό γιατί αν και τα στοιχεία του πίνακα είναι 9, μόνο τα 8 μπορούν να υπολογιστούν, γεγονός που ερμηνεύεται και μαθηματικά αλλά και γεωμετρικά. Από την μαθηματική σκοπιά, η εξίσωση 1.5 οδηγεί στην διαμόρφωση ενός γραμμικού ομογενούς συστήματος της μορφής:

$$\mathbf{A \cdot x = 0 \rightarrow A \cdot} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{11}} \\ \mathrm{e_{12}} \\ \mathrm{e_{13}} \\ \mathrm{e_{21}} \\ \mathrm{e_{22}} \\ \mathrm{e_{23}} \\ \mathrm{e_{31}} \\ \mathrm{e_{32}} \\ \mathrm{e_{33}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μία προφανή λύση, την μηδενική. Έτσι, η εύρεση της πραγματικής λύσης του συστήματος απαιτεί την δέσμευση ενός στοιχείου του πίνακα (ή γενικότερα την επιβολή μίας δέσμευσης μεταξύ των στοιχείων του πίνακα) ώστε να απορρίπτεται ως λύση ο μηδενικός **E**. Από την γεωμετρική πλευρά, η αδυναμία εκτίμησης και των 9 στοιχείων του πίνακα εκφράζει την αβεβαιότητα κλίμακας του σχετικού προσανατολισμού.

Η συνήθης πρακτική επίλυσης του συστήματος 1.6 είναι μέσω της Ανάλυσης Ιδιαζουσών Τιμών (SVD), τα βήματα της οποίας περιγράφονται εδώ καθώς ήταν αυτά που υλοποιήθηκαν στο πειραματικό στάδιο της εργασίας. Αναλυτικότερα, η εύρεση του δεξιού μηδενικού χώρου (right null space) του πίνακα σχεδιασμού **A**, η οποία ισοδυναμεί με την λύση του συστήματος, γίνεται μέσω της SVD του **A**:

$$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = SVD(\mathbf{A}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{UDV^T} \tag{1.7}$$

Ο δεξιός μηδενικός χώρος του **A** είναι οι στήλες του πίνακα **V** που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές (singular values). Ο πίνακας **D** που προκύπτει μέσω της SVD περιλαμβάνει στην διαγώνιό του τις ιδιοτιμές του **A** σε φθίνουσα σειρά. Συνεπώς, η λύση του συστήματος ισούται με την τελευταία στήλη του V που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή:

$$\mathbf{E}_{initial} = \mathbf{V}(:,9) \tag{1.8}$$

Από παραπάνω σχέση υπολογίζεται η λύση του συστήματος 1.6, η οποία όμως αποτελεί μία αρχική εκτίμηση για τον **E** καθώς ο πίνακας που προκύπτει δεν είναι βέβαιο ότι πληροί τις προϋποθέσεις που οφείλει να πληροί ένας δεσμευμένος επιπολικός πίνακας. Συγκεκριμένα, ένας πίνακας για να είναι ένας δεσμευμένος επιπολικός πίνακας (και άρα να μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός αντισυμμετρικού και ενός ορθομοναδιαίου πίνακα όπως επιβάλλει η εξίσωση 1.3) θα πρέπει να έχει βαθμό 2, που πρακτικά ισοδυναμεί με το να έχει δύο μη μηδενικές ιδιοτιμές. Συνεπώς θα πρέπει να επιβληθεί η αντίστοιχη δέσμευση και στη συνέχεια να υπολογιστεί εκ νέου ο **E**. Πρακτικά, εφαρμόζεται και πάλι η SVD, αυτή τη φορά στον αρχικό πίνακα **E** που υπολογίστηκε παραπάνω:

$$[\mathbf{U}', \mathbf{D}', \mathbf{V}'] = SVD(\mathbf{E}_{initial}) \tag{1.9}$$

και στην συνέχεια επιβάλλεται ο βαθμός 2, θέτοντας τα δύο πρώτα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα **V'** ίσα μεταξύ τους και το τρίτο ίσο με μηδέν.

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}' * \mathrm{diag}([1\ 1\ 0]) * \mathbf{V}'; \tag{1.10}$$

Η επιλογή της μονάδας ως τιμή για τις δύο μη μηδενικές και ίσες ιδιοτιμές του **E** γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας και εκφράζει την εγγενή αβεβαιότητα κλίμακας του σχετικού προσανατολισμού. Τέλος, εξετάζεται η ορίζουσα του γινομένου των πινάκων **U** και **V'** και αν αυτή προκύψει ίση με -1, τότε ο **E** που υπολογίστηκε αντικαθίσταται με τον αντίθετό του, δηλαδή

$$\text{εάν} \quad \mathbf{det}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^{\mathbf{T}}) = \mathbf{-1} \quad \text{τότε} \;\; \mathbf{E} = -\mathbf{E} \tag{1.11}$$

Η παραπάνω γραμμική μέθοδος εκτίμησης του **E** αναφέρεται στην βιβλιογραφία πως είναι εξαιρετικά ευαίσθητη στην παρουσία θορύβου και μάλιστα ακόμα και αν ο θόρυβος στις ομολογίες των σημείων είναι μικρός, μπορεί και πάλι να οδηγήσει σε λανθασμένη επίλυση. Το κλειδί για την διαχείριση του θορύβου και την ορθή εκτίμηση του **E** μέσω των γραμμικών αλγορίθμων είναι η κατάλληλη κανονικοποίηση των συντεταγμένων των ομόλογων σημείων *(Hartley,1995, Hartley & Zisserman, 2000)*.

Εξαγωγή των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού

Η γραμμική λύση του **E** οδηγεί στην εκτίμηση αρχικών τιμών για τους αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού και επιτρέπει την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Για να προκύψουν όμως οι αρχικές τιμές, θα πρέπει πρώτα να εξαχθούν από τον **E** τα ζητούμενα στοιχεία, δηλαδή το διάνυσμα της βάσης **B** και ο πίνακας στροφής **R**.

Με βάση τους *Hartley & Zisserman (2000)*, τα ζητούμενα **B** και **R** μπορούν να προκύψουν μέσω της SDV του **E** που έχει προηγηθεί:

$$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = SVD(\mathbf{E}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{UDV^T} \xrightarrow{\mathbf{D=ZW}} \quad \mathbf{E} = \mathbf{UZWV^T} = \mathbf{UZIWV^T} \tag{1.12}$$

Στην παραπάνω σχέση, ο διαγώνιος πίνακας **D** γράφεται ως γινόμενο ενός αντισυμμετρικού πίνακα **Z** και ενός πίνακα στροφής **W**, και στη συνέχεια στην σχέση γίνεται προσθήκη ενός μοναδιαίου πίνακα **I,** ο οποίος δεν αλλάζει κάτι ουσιαστικά. Έπειτα, εάν τεθεί στην θέση του μοναδιαίου πίνακα το γινόμενο ενός πίνακα στροφής με τον ανάστροφό του και παραγοντοποιηθεί κατάλληλα η εξίσωση 1.12, φαίνεται ότι το πρώτο μέλος αντιστοιχεί σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα και το δεύτερο σε έναν πίνακα στροφής, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με την εξίσωση 1.3 και είναι και το τελικό ζητούμενο της διαδικασίας:

$$\mathbf{E} = \mathbf{UZIWV^T} \xrightarrow{\mathbf{I}=\mathbf{U^T U}} \mathbf{E} = \mathbf{UZU^T UWV^T} \; = \; (\mathbf{UZU^T}) \cdot (\mathbf{UWV^T}) \tag{1.12}$$

$$\mathbf{B_x} = \mathbf{UZU^T} \quad \text{και} \quad \mathbf{R} = \mathbf{UWV^T} \tag{1.13}$$

Μολονότι, από την εξίσωση 1.13 φαίνεται ότι έχουν προκύψει τα ζητούμενα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού, απαιτείται επιπλέον διερεύνηση καθώς όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία ο **E** οδηγεί σε 4 πιθανές λύσεις, εκ των οποίων μόνο μία είναι σωστή. Για να γίνει κατανοητό αυτό, θα πρέπει να επιστρέψει κανείς στο βήμα όπου αναλύθηκε ο διαγώνιος πίνακας **D** στο γινόμενο ενός αντισυμμετρικού πίνακα **Z** και ενός πίνακα στροφής **W.** Πράγματι, αν χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω πίνακες προκύπτει ο αρχικός **D** με μοναδιαία τα δύο πρώτα στοιχεία της διαγωνίου και μηδενικό το τρίτο:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Όμως ακριβώς το ίδιο θα προκύψει αν αντί των **W** και **V** χρησιμοποιηθούν οι ανάστροφοι τους ή οι αντίθετοί τους και συγκεκριμένα:

$$\mathbf{D} = \mathbf{ZW} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{D} = \mathbf{Z^T W^T} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{D} = -\mathbf{Z^T W} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{D} = -\mathbf{ZW^T} \tag{1.15}$$

Με βάση τις σχέσεις 1.13 και 1.15 προκύπτουν οι τέσσερεις πιθανές λύσεις του σχετικού προσανατολισμού ως συνδυασμός των 2 πιθανών πινάκων στροφής και των 2 πιθανών διανυσμάτων της βάσης:

$$\begin{gathered} \mathbf{R1} = \mathbf{U} * \mathbf{W^T} * \mathbf{V^T} \quad \text{ή} \quad \mathbf{R2} = \mathbf{U} * \mathbf{W} * \mathbf{V^T} \\ \mathbf{B1} = \mathbf{U} * \mathbf{Z^T} * \mathbf{U^T} \quad \text{ή} \quad \mathbf{B2} = \mathbf{U} * \mathbf{Z} * \mathbf{U^T} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Η επιλογή του ορθού συνδυασμού των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να γίνει αν υπολογιστούν οι συντεταγμένες ενός σημείου του χώρου με εμπροσθοτομία και επιλεγεί εκείνη η λύση από την οποία προκύπτει η θέση του σημείου μπροστά από τις δύο μηχανές. Πρακτικά, ελέγχεται η φορά που έχει η ομόλογη ακτίνα κάθε εικόνας με το διάνυσμα που ορίζεται από αντίστοιχο προβολικό κέντρο και το υπολογιζόμενο σημείο του χώρου, και επιλέγεται ο συνδυασμός που οδηγεί σε ομόρροπα διανύσματα και για τις δύο εικόνες.

Από το παραπάνω φαίνεται ότι η εύρεση των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού, μολονότι βασίζεται στην εκτίμηση του **E** μέσω της συνθήκης συνεπιπεδότητας, τελικά εμπλέκει και την επίλυση της εμπροσθοτομίας. Έτσι, θα πρέπει να επισημανθεί ότι αν και ο υπολογισμός του **E** είναι ανεξάρτητος από την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας, η τελική ανάκτηση των άγνωστων παραμέτρων του σχετικού από αυτόν εμπλέκει και πάλι την ανακατασκευή σημείων του χώρου.

Μη γραμμική λύση της συνθήκης συνεπιπεδότητας

Η συνθήκη συνεπιπεδότητας που παρουσιάστηκε στην σχέση 1.1 αποτελεί την μαθηματική έκφραση του σχετικού προσανατολισμού και η επίλυσή της οδηγεί στην εκτίμηση των 5 άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του προβλήματος. Μέχρι το σημείο αυτό, από την γραμμική λύση εκτίμησης του **E** που παρουσιάστηκε παραπάνω έχουν προκύψει οι ζητούμενες αρχικές τιμές και άρα είναι πλέον δυνατόν να επιλυθεί η μη γραμμική εξίσωση συνεπιπεδότητας.

Μαθηματικά, η συνθήκη συνεπιπεδότητας ισοδυναμεί με το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων, το οποίο μπορεί να εκφράσει κανείς αναπτύσσοντας την παρακάτω ορίζουσα αν χρησιμοποιηθούν οι συνιστώσες των διανυσμάτων. Έτσι, η εξίσωση συνεπιπεδότητας γίνεται:

$$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{x_1}\times\mathbf{x_2})=\mathbf{0}\rightarrow\begin{vmatrix}\mathrm{B_x} & \mathrm{B_y} & \mathrm{B_z}\\ \mathrm{x_1} & \mathrm{y_1} & \mathrm{z_1}\\ \mathrm{x_2} & \mathrm{y_2} & \mathrm{z_2}\end{vmatrix}=\mathbf{0} \qquad (1.17)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η άρση της αβεβαιότητας της κλίμακας γίνεται εάν τεθεί η κατά x συνιστώσα της βάσης ίση με 1, το οποίο προκύπτει αν διαιρεθεί το διάνυσμα της βάσης με την αρχική τιμή της B_x. Έτσι η σχέση 1.17 γίνεται:

$$\begin{vmatrix}1 & \mathrm{b_y} & \mathrm{b_z}\\ \mathrm{x_1} & \mathrm{y_1} & \mathrm{z_1}\\ \mathrm{x_2} & \mathrm{y_2} & \mathrm{z_2}\end{vmatrix}=\mathbf{0} \qquad (1.18)$$

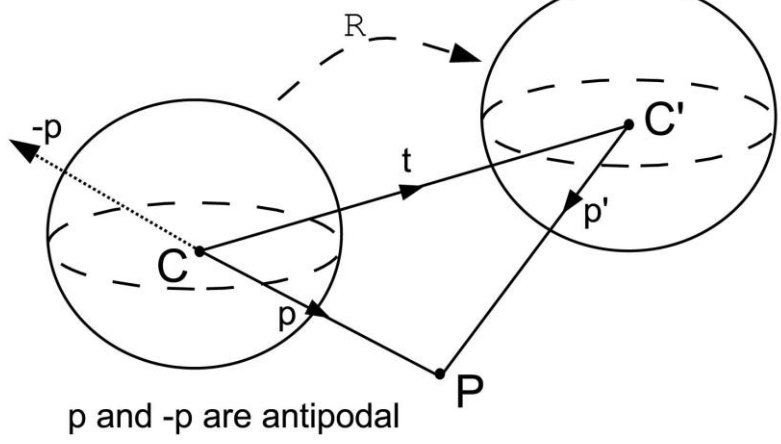
Στην παραπάνω εξίσωση δεν εμφανίζονται τα στοιχεία του πίνακα στροφής της δεξιάς εικόνας και αυτό γιατί οι συντεταγμένες $\mathbf{x_2}=[x_2\ y_2\ z_2]^T$ αναφέρονται στο σύστημα της δεξιάς εικόνας. Η επίλυση της 1.18 απαιτεί την έκφραση των ομόλογων ακτίνων της δεξιάς εικόνας στο σύστημα του στερεομοντέλου που ισοδυναμεί με την στροφή τους μέσω του άγνωστου πίνακα **R**, με αποτέλεσμα να υπεισέρχονται έτσι και τα στοιχεία του πίνακα στροφής στην εξίσωση. Τελικά, λοιπόν, η ανάπτυξη της ορίζουσας της σχέσης 1.18 οδηγεί στην μη γραμμική εξίσωση που συνδέει τους 5 αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού με τις παρατηρούμενες ποσότητες. Με δεδομένο ότι για κάθε ζεύγος ομόλογων σημείων προκύπτει μία εξίσωση, απαιτούνται τουλάχιστον 5 ομόλογα σημεία για την επίλυση της 1.18. Όταν υπάρχει πλεόνασμα παρατηρήσεων τότε η επίλυση γίνεται μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και συνηθέστερα μέσω της γενικής μεθόδου συνόρθωσης. Η γενική μέθοδος επιλέγεται λόγω της μορφής της εξίσωσης που προκύπτει από την ανάπτυξη της παραπάνω ορίζουσας, η οποία στο δεξί μέλος έχει μηδενική τιμή και στο αριστερό οι άγνωστοι συνδέονται με τις παρατηρήσεις. Έτσι, μέσω της γενικής μεθόδου προκύπτει η βέλτιστη τιμή των αγνώστων με ελαχιστοποίηση του σφάλματος κλεισίματος της συνθήκης συνεπιπεδότητας. Η ερμηνεία του σφάλματος της συνθήκης περιλαμβάνεται στο Κεφάλαιο 3, μαζί με την περιγραφή εναλλακτικών συναρτήσεων σφάλματος. Τέλος, αναλυτική περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου της γενικής μεθόδου της ΜΕΤ όπως αυτό εφαρμόζεται στην εξίσωση συνεπιπεδότητας παραθέτει η Αδάμ (2011).

Εναλλακτικές εκφράσεις της επιπολικής δέσμευσης

Ο αλγόριθμος των 8-σημείων αλλά και όλες οι γραμμικές μέθοδοι επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού είναι σε γενικές γραμμές απλές στην υλοποίηση, γρήγορες στην επίλυση και ικανές να οδηγήσουν σε καλά αποτελέσματα σε αρκετές περιπτώσεις. Από την άλλη πλευρά, όλες χρησιμοποιούν τον πίνακα **E** που αποτελεί μία έμμεση έκφραση των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού, προσέγγιση που έχει ορισμένα μειονεκτήματα. Συγκεκριμένα, οι *Kneip & Lynen (2012)* επισημαίνουν πώς το γεγονός ότι τα στοιχεία του **E** δεν εκφράζουν άμεσα συγκεκριμένες παραμέτρους της κίνησης της μηχανής δυσχεραίνει την δυνατότητα φυσικής ερμηνείας του προβλήματος και της ποιότητας της λύσης. Ένα δεύτερο μειονέκτημα είναι ότι, μολονότι η συνθήκη συνεπιπεδότητας στην πράξη μπορεί να εκτιμήσει ορθά τις στροφές ακόμη και στην περίπτωση της μηδενικής μετάθεσης, είναι προφανές ότι εάν η βάση μηδενιστεί η επιβαλλόμενη δέσμευση εξασθενεί καθώς η εξίσωση 1.2 μηδενίζεται και άρα ικανοποιείται για κάθε τιμή του **E**. Τέλος, η συνθήκη συνεπιπεδότητας αδυνατεί να δώσει μοναδική λύση στην περίπτωση που τα διαθέσιμα ομόλογα σημεία είναι συνεπίπεδα. Στα παραπάνω έρχεται να προστεθεί και η ευαισθησία εκτίμησης του **E** σε παρουσία θορύβου, γεγονός που συνδέεται άμεσα με την προαναφερθείσα αλληλοεξάρτηση στροφής και μετάθεσης. Έτσι, θεωρώντας ότι το πρόβλημα όλων των γραμμικών λύσεων είναι ότι υιοθετούν με τον ένα ή τον άλλον τρόπο την παραμετροποίηση του προβλήματος μέσω του **E**, οι *Briales et al. (2017)* καταλήγουν ότι ο θόρυβος των παρατηρήσεων σε συνδυασμό με δυσμενή γεωμετρία μπορεί να τις οδηγήσει σε αποτυχία εύρεσης ορθής λύσης. Συνεπεία αυτού, το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζουν και οι μη γραμμικές λύσεις αφού οι αρχικές τιμές που χρησιμοποιούν έχουν προκύψει από τους γραμμικούς αλγορίθμους.

Η αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων επιβάλλει την υιοθέτηση μίας διαφορετικής προσέγγισης για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, η οποία αφενός θα υπολογίζει τις άγνωστες στροφές ανεξάρτητα από την μετάθεση και αφετέρου θα είναι ικανή να διαχειριστεί και την κρίσιμη περίπτωση της πολύ μικρής, ακόμα και μηδενικής, μετάθεσης. Στην βιβλιογραφία τα τελευταία χρόνια εντοπίζονται εργασίες που κινούνται στο πλαίσιο αυτό και, αντί της συνήθους δέσμευσης συνεπιπεδότητας, διατυπώνουν και χρησιμοποιούν διαφορετικές εξισώσεις για την επίλυση.

Οι *Lim et al. (2010)*, έτσι, διατύπωσαν μία τέτοια εξίσωση για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού η οποία όμως δεν έχει καθολική εφαρμογή. Συγκεκριμένα, η μεθοδολογία τους μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε εικόνες μεγάλου γωνιακού ανοίγματος και ιδανικά σε σφαιρικές εικόνες, καθώς βασίζεται στην χρήση αντιδιαμετρικών σημείων. Με τον όρο αντιδιαμετρικά νοούνται εκείνα τα απεικονιζόμενα σημεία που στην μία εικόνα ορίζουν δύο συνευθειακές οπτικές ακτίνες με αντίθετη φορά (Εικόνα 5). Με βάση τον ορισμό αυτό είναι προφανές ότι τέτοια σημεία είναι δυνατόν να απεικονίζονται μόνο σε εικόνες από υπερευρυγώνιους φακούς ή σε σφαιρικές εικόνες. Στόχος της εργασίας τους είναι να ανεξαρτητοποιηθεί η εκτίμηση της στροφής από την μετάθεση λόγω των προαναφερθέντων προβλημάτων που έχει η εξαγωγή τους από τον **E** όταν οι κινήσεις της μηχανής είναι μικρές. Έτσι, αντί της κλασικής συνεπιπεδότητας ορίζουν δύο νέες εξισώσεις βασιζόμενοι σε γεωμετρικές δεσμεύσεις που ισχύουν στην περίπτωση των αντιδιαμετρικών σημείων και επιτρέπουν ξεχωριστό υπολογισμό της μετάθεσης από την στροφή.



Εικόνα 5: Αντιδιαμετρικά σημεία στην μία εικόνα του στερεοζεύγους (Lim et al., 2010).

Η βασική ιδέα στηρίζεται στην γνωστή επιπολική δέσμευση και στο πώς αυτή διαμορφώνεται στην ειδική περίπτωση των αντιδιαμετρικών σημείων. Συγκεκριμένα, αν θεωρηθούν δύο ζεύγη ομόλογων σημείων (**p**,**p**΄) και (**q**,**q**΄), τότε προφανώς τα σημεία κάθε ζεύγους θα ανήκουν σε ένα επίπεδο, το γνωστό επιπολικό επίπεδο. Αν όμως τα **p** και **q** είναι αντιδιαμετρικά σημεία στην μία εικόνα, τότε θα ορίζουν δύο αντίρροπες οπτικές ακτίνες και άρα θα ανήκουν και αυτές σε ένα επίπεδο. Συνεπώς τα δύο προαναφερθέντα επιπολικά επίπεδα θα είναι ένα και το αυτό, και άρα και τα τέσσερα σημεία θα είναι συνεπίπεδα. Το τελευταίο εκφράζεται μαθηματικά από την παρακάτω σχέση, η οποία είναι φανερό ότι περιλαμβάνει την μετάθεση αλλά όχι και τη στροφή καθώς χρησιμοποιούνται τα σημεία μόνο της μίας εικόνας:

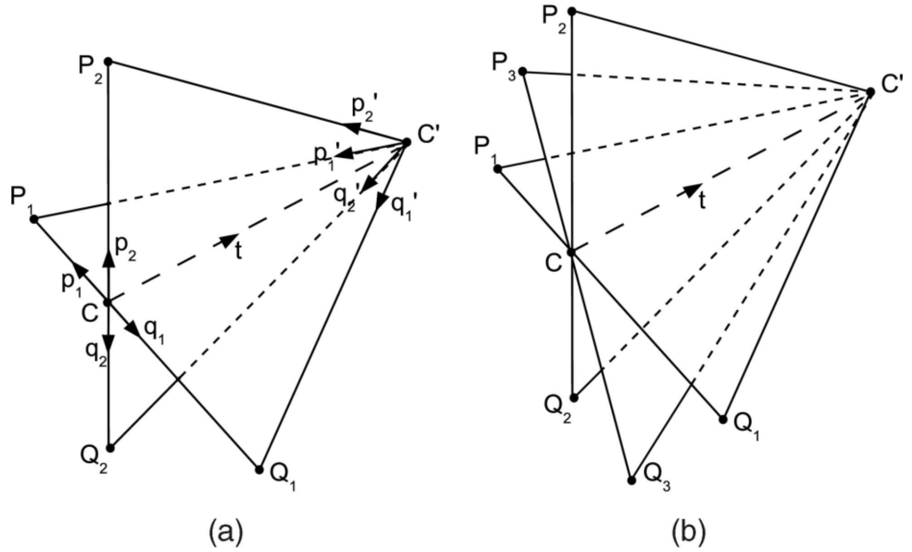
$$\mathbf{t}'^{T}(\mathbf{p}' \times \mathbf{q}') = 0 \tag{1.19}$$

Για να ισχύει η εξίσωση 1.19, θα πρέπει τα χρησιμοποιούμενα σημεία να απεικονίζονται ως αντιδιαμετρικά στην αριστερή εικόνα και στην εξίσωση να χρησιμοποιούνται τα σημεία τις δεξιάς εικόνας, με συντεταγμένες στο σύστημα αναφοράς της. Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί ότι το εκτιμώμενο διάνυσμα της μετάθεσης έχει φορά από την δεξιά προς την αριστερή εικόνα και η διεύθυνσή του υπολογίζεται στο σύστημα αναφοράς της δεξιάς εικόνας. Η εκτίμηση του διανύσματος της μετάθεσης με την παραπάνω εξίσωση απαιτεί τουλάχιστον δύο ζεύγη ομόλογων σημείων, τα οποία θα απεικονίζονται ως αντιδιαμετρικά στην μία από τις δύο εικόνες. Να σημειωθεί ότι σημεία του απείρου δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέσω αυτής της εξίσωσης για την ανάκτηση της μετάθεσης αφού αν τα **P** και **Q** βρίσκονται στο άπειρο τότε οι αντίστοιχες οπτικές ακτίνες θα είναι αντιδιαμετρικές και στις δύο εικόνες.

Με παρόμοιο τρόπο οι *Lim et al. (2010)* διατυπώνουν μία νέα δέσμευση για τον υπολογισμό της στροφής. Συγκεκριμένα, θεωρώντας και πάλι ότι τα **p** και **q** είναι αντιδιαμετρικά σημεία στην αριστερή εικόνα και άρα συνεπίπεδα με τα ομόλογά τους, **p’** και **q’**, η εκτίμηση της στροφής μπορεί να γίνει ως ακολούθως:

$$(\mathbf{Rp})^{T}(\mathbf{p}' \times \mathbf{q}') = 0 \tag{1.20}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί ένα μικτό γινόμενο και επιβάλλει το διάνυσμα του σημείου **p** της αριστερής εικόνας να είναι κάθετο προς το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου που ορίζουν τα **p’** και **q’**. Για την εκτίμηση των τριών άγνωστων στροφών απαιτούνται 3 τουλάχιστον εξισώσεις, άρα 3 τουλάχιστον ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων (Εικόνα 6). Παρ' όλα αυτά, για την γραμμική επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής της 1.20 απαιτούνται τουλάχιστον 9 ζεύγη σημείων για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα στροφής αντί των στροφών απευθείας.

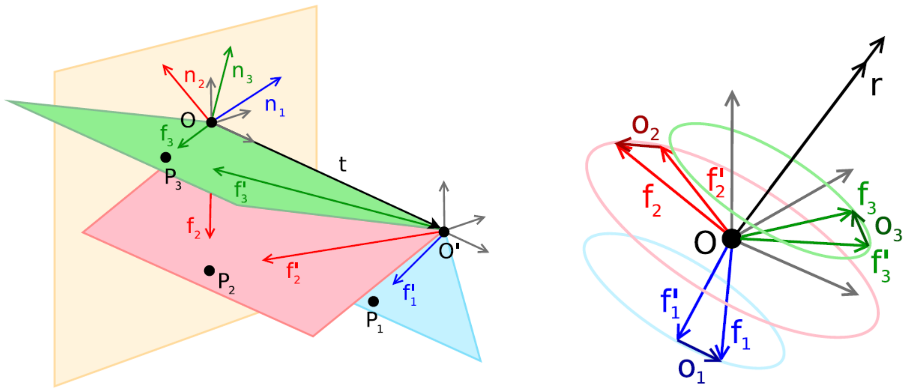


Εικόνα 6: Δύο ζεύγη ομόλογων αντιδιαμετρικών σημείων ορίζουν την διεύθυνση της βάσης, ενώ τρία ζεύγη δεσμεύουν τον προσανατολισμό της αριστερής εικόνας (Lim et al., 2010).

Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της στροφής ανεξάρτητα από την μετάθεση, γεγονός που έχει δύο κυρίως πλεονεκτήματα. Το πρώτο και κύριο είναι ότι τυχόν σφάλματα στην εκτίμηση της μετάθεσης δεν επηρεάζουν την εκτίμηση της στροφής και αντιστρόφως. Ένα δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού αντιμετωπίζεται ως δύο ξεχωριστά και μικρότερων διαστάσεων προβλήματα το οποία επιλύονται ευκολότερα. Από την άλλη πλευρά, η εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής περιορίζεται στην χρήση αντιδιαμετρικών σημείων και άρα δεν είναι εφαρμόσιμη σε όλες τις περιπτώσεις. Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί ότι ναι μεν επιτυγχάνεται η ανεξαρτητοποίηση της εκτίμησης των στροφών από την διεύθυνση της μετάθεσης, αλλά και πάλι δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί η περίπτωση της μηδενικής βάσης. Με άλλα λόγια, η κρίσιμη περίπτωση όπου η μηχανή απλώς στρέφεται χωρίς να κινείται δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί ούτε με την παραπάνω μεθοδολογία, καθώς σε αυτήν την περίπτωση τα αντιδιαμετρικά σημεία της πρώτης μηχανής θα παρέμεναν αντιδιαμετρικά και στην δεύτερη.

Στην αντιμετώπιση των προβλημάτων του σχετικού προσανατολισμού που προαναφέρθηκαν κρίνεται σημαντική η συνεισφορά των *Kneip et al. (2012)*, *Kneip & Lynen (2013)* και *Briales et al. (2017)*. Οι εν λόγω εργασίες αποτελούν διαδοχικές βελτιώσεις της ίδιας κεντρικής ιδέας καθώς στον πυρήνα τους βρίσκεται η ίδια γεωμετρική δέσμευση. Όπως και προηγουμένως, το ζητούμενο είναι να ανεξαρτητοποιηθεί η εκτίμηση της στροφής από την μετάθεση, δίνοντας όμως έμφαση στον υπολογισμό της πρώτης στην περίπτωση που η δεύτερη είναι μηδενική. Προς τούτο, οι Kneip et al. (2012) διατυπώνουν μία δέσμευση που επιβάλλει την συνεπιπεδότητα των κάθετων διανυσμάτων των επιπολικών επιπέδων (epipolar plane normal coplanarity constraint). Για την διατύπωση αυτής της δέσμευσης οι συγγραφείς διακρίνουν δύο περιπτώσεις, την περίπτωση όπου η μηχανή μόνο μετακινείται στο χώρο (purely translational motion) και την περίπτωση όπου η μηχανή μόνο στρέφεται (purely rotational motion) (Εικόνα 7).

Στην πρώτη περίπτωση παρατηρείται ότι τα κάθετα διανύσματα όλων των επιπολικών επιπέδων οφείλουν να είναι συνεπίπεδα και συγκεκριμένα οφείλουν να ανήκουν σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στην διεύθυνση της βάσης.



Εικόνα 7: Αριστερά η περίπτωση κινούμενης μηχανής (purely translational motion) και δεξιά η περίπτωση περιστρεφόμενης μηχανής (purely rotational motion) (Kneip et al., 2012).

Η έκφραση της συνεπιπεδότητας των κάθετων διανυσμάτων απαιτεί την χρήση τουλάχιστον τριών διανυσμάτων και διατυπώνεται μαθηματικά μέσω του γνωστού μικτού γινομένου, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με ανάπτυξη της παρακάτω ορίζουσας στις ομόλογες ακτίνες $\mathbf{f_n}$ και $\mathbf{f_n}$':

$$|(\mathbf{f_1} \times \mathbf{f}_1') \; (\mathbf{f_2} \times \mathbf{f}_2') \; (\mathbf{f_3} \times \mathbf{f}_3')| = 0 \qquad (1.21)$$

Στην δεύτερη περίπτωση (όταν δηλαδή αλλάζει μόνο η στροφή της μηχανής) παρατηρείται ότι τα διανύσματα της οπτικής ροής οφείλουν να είναι συνεπίπεδα. Τα διανύσματα αυτά συμβολίζονται στην εικόνα 7 ως $\mathbf{O_n}$ και προκύπτουν από την αφαίρεση των ομόλογων ακτίνων $\mathbf{f_n}$ και $\mathbf{f_n}$'. Συνεπώς και στην περίπτωση αυτή προκύπτει μία εξίσωση για κάθε μία τριάδα σημείων, μέσω την ορίζουσας του μικτού γινομένου τους.

Η κεντρική ιδέα της ανεξάρτητης εκτίμησης των στροφών από την μετάθεση είναι ότι οι στροφές μπορούν να υπολογιστούν ορθά όταν τα ομόλογα σημεία ικανοποιούν την δέσμευση που ισχύει στην περίπτωση που η μηχανή μόνο μετακινείται, ενώ η μετάθεση υπολογίζεται ορθά όταν τα ομόλογα σημεία ικανοποιούν την δέσμευση που ισχύει στην περίπτωση που η μηχανή μόνο στρέφεται. Με δεδομένο ότι στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούνται τριάδες σημείων, η εκτίμηση του πίνακα στροφής απαιτεί τρεις εξισώσεις (δηλαδή 5 ομολογίες σημείων). Σε αυτές έρχονται να προστεθούν επιπλέον εξισώσεις δεσμεύσεων ώστε να διασφαλίζεται ότι ο υπολογιζόμενος πίνακας είναι πράγματι πίνακας στροφής. Από την επίλυση δεν προκύπτει μοναδική λύση για τον πίνακα στροφής και συνεπεία αυτού απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος. Η εύρεση της σωστής λύσης δεν βασίζεται στον τριγωνισμό ενός σημείου όπως στην συνήθη περίπτωση αλλά τον έλεγχο των δεσμεύσεων που πρέπει να ικανοποιεί ένας πίνακας στροφής, διασφαλίζοντας έτσι ότι η βάση δεν εμπλέκεται ούτε στο τελικό αυτό στάδιο (και άρα οι παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού υπολογίζονται πράγματι τελείως ανεξάρτητα).

Η δέσμευση της συνεπιπεδότητας των κάθετων διανυσμάτων των επιπολικών επιπέδων, αν και θεωρητικά παραμένει σε ισχύ ακόμα και στην περίπτωση της μηδενικής μετάθεσης, οι συγγραφείς αναφέρουν ότι στην πράξη η γραμμική επίλυση με τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό σημείων αριθμητικά προβλήματα. Για το λόγο αυτό προτείνουν να γίνεται διερεύνηση του είδους της κίνησης πριν την επίλυση (model selection) και άρα υπό αυτήν την έννοια η προτεινόμενη μεθοδολογία δεν έχει καθολική εφαρμογή. Επιπλέον, η μαθηματική διατύπωση της προτεινόμενης γεωμετρικής δέσμευσης χρησιμοποιεί τριάδες σημείων με αποτέλεσμα να αυξάνει σημαντικά η πολυπλοκότητα και ο χρόνος επίλυσης όταν δεν χρησιμοποιείται ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός σημείων. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζουν οι *Kneip & Lynen (2013)* στην εργασία τους, η οποία στον πυρήνα της είναι ίδια με την προηγούμενη πλην όμως εισάγει σημαντικές βελτιώσεις. Οι τελευταίοι χρησιμοποιούν την ίδια γεωμετρική δέσμευση με τους προηγούμενους αλλά παραμετροποιούν διαφορετικά το πρόβλημα πετυχαίνοντας σημαντικά πλεονεκτήματα από πλευράς επίλυσης. Συγκεκριμένα βασίζονται στην ίδια γεωμετρική δέσμευση (την συνεπιπεδότητα των κάθετων διανυσμάτων των επιπολικών επιπέδων) αλλά, αντί να χρησιμοποιούν τριάδες σημείων στην εξίσωση παρατήρησης, αντιμετωπίζουν το σύνολο των κάθετων διανυσμάτων των επιπολικών επιπέδων ως ένα νέφος σημείων.

Αναλυτικότερα, δημιουργούν έναν πίνακα **N** διαστάσεων *3 x n* παραθέτοντας σε σειρά τα κάθετα διανύσματα των επιπολικών επιπέδων, και στην συνέχεια πολλαπλασιάζοντας αυτόν με τον ανάστροφό του παίρνουν ένα πίνακα **M** διαστάσεων 3x3. Ο **M** περιλαμβάνει όλη την πληροφορία για τις ζητούμενες στροφές λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των παρατηρήσεων, και τελικά ο άγνωστος πίνακας στροφής μπορεί να προκύψει μέσω του **M** με ελαχιστοποίηση της μικρότερης ιδιοτιμής του. Το πλεονέκτημα σε αυτήν την προσέγγιση είναι ότι οι διαστάσεις του **M** είναι ανεξάρτητες του πλήθους των παρατηρήσεων με αποτέλεσμα να μην αυξάνει η πολυπλοκότητα και ο χρόνος επίλυσης όσο αυξάνουν τα ομόλογα σημεία. Επιπλέον, οι *Kneip & Lynen (2013)* μειώνουν τις πιθανές λύσεις μέσω κατάλληλης παραμετροποίησης του πίνακα στροφής με την παραδοχή ότι η σχετική στροφή σε διαδοχικές εικόνες μόλις και με τα βίας μπορεί να υπερβαίνει τις 90°. Τέλος, κατά τον υπολογισμό του **M**, μέσω κατάλληλης παραγοντοποίησης, τα αθροίσματα που υπολογίζονται εμπλέκουν τελικά μόνο τις συντεταγμένες των ομόλογων σημείων και όχι τα άγνωστα στοιχεία του **R**, με αποτέλεσμα οι υπολογισμοί που έχουν μεγαλύτερες απαιτήσεις σε χρόνο να γίνονται μόνο στην πρώτη επανάληψη διατηρώντας έτσι το χρόνο εκτέλεσης σταθερό. Εκτός από τα προηγηθέντα, σημαντικό πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι διαχειρίζεται χωρίς κανέναν περιορισμό και την κρίσιμη περίπτωση της μηδενικής μετάθεσης.

Οι *Briales et al. (2017)* βελτιώνουν περαιτέρω την υλοποίηση της παραπάνω μεθοδολογίας, αξιοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης από την θεωρία των κυρτών συνόλων (*convex optimization theory*) και πετυχαίνουν ταχύτερη και αποτελεσματικότερη υλοποίηση, ικανή να αναδείξει και πάλι την καλύτερη τιμή για τους αγνώστους.

Κοίνο σημείο όσων παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι ο διαχωρισμός του υπολογισμού των στροφών από την μετάθεση, προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα του σχετικού προσανατολισμού που απορρέουν από την αλληλεξάρτηση των διαφορετικών παραμέτρων της κίνησης της μηχανής. Οι προσπάθειες αυτές καταδεικνύουν την ανάγκη έκφρασης του προβλήματος του σχετικού προσανατολισμού μέσω μίας εναλλακτικής εξίσωσης ώστε να αντιμετωπιστούν οι αδυναμίες που παρουσιάζει η κλασική συνεπιπεδότητα. Από την άλλη πλευρά, θα πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι οι εναλλακτικές προσεγγίσεις για το πρόβλημα του σχετικού σε καμία περίπτωση δεν σημαίνουν ότι η συνήθης πρακτική δεν μπορεί να φέρει καλά αποτελέσματα. Αντίθετα, η εξίσωση συνεπιπεδότητας εκφράζει μία πολύ ισχυρή γεωμετρική δέσμευση ικανή να επιλύσει το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού στην πλειονότητα των περιπτώσεων.

2

Σφαιρικά πανοράματα

Ο όρος **πανοραμικές εικόνες** αναφέρεται σε εικόνες μεγαλύτερου γωνιακού ανοίγματος (field of view) από ό,τι οι συμβατικές, με αποτέλεσμα να απεικονίζεται σε αυτές μεγαλύτερο τμήμα του χώρου. Έτσι, αν μία συμβατική εικόνα έχει γωνιακό άνοιγμα αντίστοιχο με εκείνο του ανθρώπινου ματιού, πανόραμα μπορεί να χαρακτηριστεί σε γενικές γραμμές κάθε εικόνα με άνοιγμα μεγαλύτερο από αυτό. Ειδικότερα ως **σφαιρικές εικόνες** ή **σφαιρικά πανοράματα** νοούνται οι εικόνες με πλήρες οπτικό πεδίο, δηλαδή με πλήρη κάλυψη προς όλες τις διευθύνσεις του χώρου (Omnidirectional images).

Αν και οι πρώτες προσπάθειες δημιουργίας πανοραμικών εικόνων χρονολογούνται δύο αιώνες πριν, η εξάπλωση και ευρεία χρήση τους παρατηρείται τα τελευταία χρόνια. Στις μέρες μας, η χρήση τέτοιων εικόνων, και μάλιστα όχι απλώς πανοραμικών αλλά σφαιρικών, αποτελεί μία συνήθη πρακτική σε πλήθος εφαρμογών και από πολλές ειδικότητες. Εξαίρεση δεν θα μπορούσαν να αποτελέσουν οι κλάδοι της φωτογραμμετρίας και της όρασης υπολογιστών, στους οποίους οι εικόνα παίζει κυρίαρχο ρόλο. Το ολοένα αυξανόμενο ενδιαφέρον που παρατηρείται και στα δύο αυτά επιστημονικά πεδία οφείλεται σε δύο κυρίως λόγους: την αυξημένη διαθεσιμότητα πανοραμικών δεδομένων αλλά και τα πλεονεκτήματα των δεδομένων αυτών έναντι των συμβατικών εικόνων. Ερωτήματα λοιπόν που εύλογα προκύπτουν είναι γιατί να χρησιμοποιηθούν τα πανοραμικά δεδομένα και ποια είναι αυτά τα πλεονεκτήματα. Στα επόμενα, μέσα από την υπάρχουσα βιβλιογραφία επιχειρείται να απαντηθούν τα παραπάνω και να δοθεί μία κατά το δυνατόν πληρέστερη εικόνα σχετικά με τα πανοράματα, τόσο από πλευράς γεωμετρίας όσο και εφαρμογών.

Το πρώτο ζήτημα που φαίνεται να αντιμετώπισαν οι ερευνητές από τα μέσα της δεκαετίας του '90 ήταν η δημιουργία πανοραμικών εικόνων είτε σχεδιάζοντας πανοραμικές μηχανές είτε αναπτύσσοντας αλγορίθμους για την δημιουργία πανοραμάτων από απλές εικόνες. Στην πρώτη περίπτωση, εμφανίστηκαν μηχανές που ήταν σε θέση να πραγματοποιήσουν μία πανοραμική λήψη είτε μέσω περιστροφής περί έναν άξονα (rotating cameras) είτε μέσω υπερευρυγώνιων φακών (fisheye lens) ή συνδυασμού φακών και κατόπτρων (catadioptric cameras). Στην δεύτερη περίπτωση, αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι και εφαρμογές για την συσχέτιση διαδοχικών συμβατικών εικόνων μέσω ομόλογων σημείων και τη συνένωσή τους σε ένα ενιαίο πανόραμα (stitching algorithms). Τα αποτελέσματα από την έρευνα και στους δύο παραπάνω τομείς άνοιξαν το δρόμο για την ευρεία διάθεση σήμερα πανοραμικών δεδομένων.

Σήμερα στο εμπόριο είναι διαθέσιμες μηχανές που λαμβάνουν απευθείας σφαιρικά πανοράματα (όπως η Lady Bug της Point Gray και η Theta της Ricoh) (Εικόνα 8, Εικόνα 9), αλλά και λογισμικά συνένωσης εικόνων σε πανοράματα είναι ενσωματωμένα ακόμα και σε έξυπνα κινητά τηλέφωνα. Έτσι, με δεδομένο ότι το πρόβλημα της συλλογής και δημιουργίας των πανοραμικών εικόνων μπορεί πλέον να θεωρηθεί σε μεγάλο βαθμό ένα λυμένο ζήτημα, το ενδιαφέρον έχει στραφεί στις δυνατότητες αξιοποίησης των εικόνων αυτών σε συνήθεις εφαρμογές και στα προβλήματα που απασχολούν τόσο την φωτογραμμετρική κοινότητα όσο και εκείνη της όρασης υπολογιστών.

Εικόνα 8: Η μηχανή Lady Bug (αριστερά) και η Theta (δεξιά).

Εικόνα 9: Οι έξι επιμέρους εικόνες που λαμβάνονται από τους 6 ξεχωριστούς φακούς της Lady Bug μετά από διόρθωση της ακτινικής διαστροφής (Tardif et al., 2008).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μία πανοραμική εικόνα καταγράφει μεγαλύτερο τμήμα του χώρου και άρα είναι προφανές ότι η χρήση πανοραμικών δεδομένων μπορεί να μειώσει σημαντικά τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων εικόνων και έτσι και τους απαιτούμενους χρόνους επεξεργασίας σε όλες τις φωτογραμμετρικές διαδικασίες. Αυτό συνιστά έναν βασικό λόγο για την ολοένα αυξανόμενη χρήση των πανοραμάτων έναντι των συμβατικών εικόνων. Ένα δεύτερο επιχείρημα που συχνά προβάλλεται είναι η ολοένα αυξανόμενη διαθεσιμότητα πανοραμικών δεδομένων που δίνει κίνητρα για την ανάπτυξη μεθόδων και τεχνικών αξιοποίησής τους. Από την σκοπιά αυτή, σημαντική είναι η συμβολή της Google και συγκεκριμένα των δεδομένων του Google Street View που αποτελεί μία βάση πανοραμικών δεδομένων που προσφέρει πυκνή κάλυψη σε παγκόσμια κλίμακα και ανανεώνεται διαρκώς (*Agarwal* *et al., 2015*). Από την άλλη πλευρά, τα τελευταία χρόνια έχει αυξηθεί και ο αριθμός μηχανών που διατίθενται στο εμπόριο και μπορούν να δώσουν απευθείας πανοραμικά δεδομένα, καθιστώντας έτσι την συλλογή σφαιρικών εικόνων πιο εύκολη. Πέρα αυτών όμως, το βασικό πλεονέκτημα των πανοραμικών εικόνων βρίσκεται στο γεωμετρικό μοντέλο που τις περιγράφει και οδηγεί στην μείωση της αβεβαιότητας του προσανατολισμού τους. Έτσι, στην ενότητα που ακολουθεί γίνεται περιγραφή του σφαιρικού μοντέλου με έμφαση στις διαφορές του ως προς το μοντέλο της κεντρικής προβολής στο επίπεδο που περιγράφει τις συμβατικές λήψεις, ώστε να γίνουν κατανοητή η συμβολή του στην αύξηση της ακρίβειας του προσανατολισμού των εικόνων.

Πριν όμως από την περιγραφή του σφαιρικού μοντέλου, κρίνεται σκόπιμη μία σύντομη αναφορά σε δύο ακόμα βασικά στοιχεία που σχετίζονται με τις πανοραμικές εικόνες και, μολονότι δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας, παίζουν σημαντικό ρόλο σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές. Κατ’ αρχάς, ένα σφαιρικό πανόραμα, και ανεξάρτητα από το πώς έχει προκύψει, για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να αποθηκευθεί σε ένα αρχείο ψηφιακής εικόνας. Συνεπώς, θα πρέπει να επιλεγεί ο τρόπος με τον οποίο η πληροφορία που καταγράφεται στην επιφάνεια της σφαιρικής εικόνας θα αναπαρασταθεί σε ένα επίπεδο. Όπως είναι γνωστό, η σφαίρα δεν είναι μία αναπτυκτή επιφάνεια και έτσι η αναπαράστασή της μέσω ενός επιπέδου επιφέρει παραμορφώσεις. Η μελέτη των παραμορφώσεων αυτών αποτελεί αντικείμενο του κλάδου της Αναλυτικής Χαρτογραφίας που ασχολείται με την διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων για την προβολή της επιφάνειας της γης σε ένα επίπεδο. Σε πλήρη αντιστοιχία με τις χαρτογραφικές προβολές, και στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων η επιλογή του μετασχηματισμού από την σφαιρική επιφάνεια στο επίπεδο είναι κρίσιμη παράμετρος καθώς το στάδιο αυτό μπορεί να επιφέρει σημαντικές παραμορφώσεις. Αν και, όπως προαναφέρθηκε, η μελέτη των χαρτογραφικών προβολών που χρησιμοποιούνται στις πανοραμικές εικόνες και οι παραμορφώσεις που επιφέρει κάθε μία από αυτές δεν είναι αντικείμενο της παρούσας εργασίας, στην εικόνα 10 παρουσιάζονται ενδεικτικά τρεις από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες προβολές. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις χρησιμοποιούμενες προβολές για σφαιρικά πανοράματα μπορεί κανείς να ανατρέξει στο *Τσιρώνης (2015)* όπου γίνεται εκτενέστερη αναφορά στις προβολές και τις παραμορφώσεις τους, ενώ επίσης παρατίθενται και επιπλέον αναφορές από την διεθνή βιβλιογραφία.

Το δεύτερο σημαντικό ζήτημα που σχετίζεται με τις πανοραμικές εικόνες αφορά την αυτόματη συνταύτιση (image matching). Έτσι, όπως και στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων έτσι και στις πανοραμικές όλες οι σχετικές εφαρμογές ι βασίζονται κυρίως σε ομολογίες σημείων, οι οποίες ζητούμενο είναι να εξάγονται αυτόματα. Αν και στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων τα ερευνητικά αντικείμενα της αυτόματης εξαγωγής χαρακτηριστικών σημείων και της αυτόματης συνταύτισης βρίσκονται σε προχωρημένο στάδιο και οι διαθέσιμοι τελεστές είναι σε θέση να διαχειριστούν σημαντικές παραμορφώσεις μεταξύ των εικόνων, στις πανοραμικές εικόνες τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά. Παρά το γεγονός ότι στην βιβλιογραφία αναφέρεται η χρήση ευρέως διαδεδομένων τελεστών σε πανοραμικές εικόνες αλλά και η δημιουργία νέων «σφαιρικών τελεστών» που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εύρεση ομόλογων σημείων στα πανοράματα είναι σαφώς δυσκολότερη και ό,τι συχνά οι υπάρχοντες τελεστές αποτυγχάνουν.

Εικόνα 10: Συχνά χρησιμοποιούμενες χαρτογραφικές προβολές: Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα (πάνω αριστερά), κυβικό πανόραμα (πάνω δεξιά) και κυλινδρικό πανόραμα (κάτω) (Aly & Bouguet, 2011).

Αναλυτικότερα, οι *Tong et al. (2014)* χαρακτηριστικά αναφέρουν ότι παρά την έρευνα που διεξάγεται στο πεδίο της συνταύτισης στις πανοραμικές εικόνες, το πρόβλημα παραμένει ανοικτό. Αιτία πίσω από αυτό είναι προφανώς οι μεγάλες παραμορφώσεις που έχουν οι πανοραμικές εικόνες, τις οποίες αδυνατούν να διαχειριστούν οι συνήθεις τελεστές εξαγωγής χαρακτηριστικών σημείων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν ο SIFT και ο SURF, δύο από τους πιο διαδεδομένους τελεστές με μεγάλα ποσοστά επιτυχίας σε συμβατικές εικόνες, οι οποίοι έχουν εφαρμοσθεί από αρκετούς ερευνητές και σε πανοράματα χωρίς τα επιθυμητά αποτελέσματα ακριβώς λόγω των μη γραμμικών παραμορφώσεων των εικόνων. Αν και έχουν προταθεί αρκετές παραλλαγές των παραπάνω τελεστών, αυτές δεν είναι σε θέση να διαχειριστούν πλήρως τις πολύ μεγάλες παραμορφώσεις των πανοραμικών εικόνων. Έτσι, στην πράξη, στην πλειοψηφία των εφαρμογών με πανοραμικές εικόνες, η εύρεση ομόλογων σημείων γίνεται είτε χειροκίνητα είτε αυτόματα με κάποια από τις παραλλαγές των παραπάνω τελεστών (s-SIFT, A-SIFT) προϋποθέτοντας όμως πολύ μικρές βάσεις για τις εικόνες. Επιπλέον, σημαντικό ρόλο παίζει και η εκάστοτε προβολή που χρησιμοποιείται για το πανόραμα αφού από αυτήν εξαρτάται το μέγεθος των παραμορφώσεων της ψηφιακής εικόνας. Έτσι, συναντώνται εφαρμογές όπου η συνταύτιση ναι μεν γίνεται αυτόματα αλλά χρησιμοποιούνται είτε οι αρχικές επιμέρους εικόνες από πανοραμική μηχανή είτε προβολές του πανοράματος που ελαχιστοποιούν τις παραμορφώσεις (π.χ. κυβικό πανόραμα ή γνωμονική προβολή). Εξαίρεση στα παραπάνω φαίνεται να αποτελεί ο τελετής A-KAZE (*Alcantarilla et al., 2013*), ο οποίος εφαρμόζεται από τους *Pathak et al. (2016)* σε πανοραμικές εικόνες που προβάλλονται σε ορθή ισαπέχουσα κυλινδρική προβολή και πετυχαίνει πολύ καλά αποτελέσματα. Τέλος, ο σφαιρικός τελεστής των *Tong et al. (2014)* υπερτερεί σημαντικά απέναντι στους τελεστές SIFT και D-Nets, καθώς οι δημιουργοί του αναφέρουν ότι εντοπίζει έως και διπλάσιες ομολογίες σημείων στις εικόνες εξασφαλίζοντας επιπλέον καλή κατανομή.

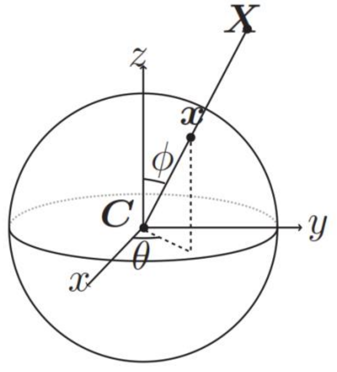
Συνοψίζοντας, ο βαθμός επιτυχίας της συνταύτισης στα πανοράματα εξαρτάται από την εκάστοτε χαρτογραφική προβολή που χρησιμοποιείται αλλά και από την βάση του στερεοζεύγους. Το τελευταίο αποτελεί αρκετά σημαντική παράμετρο καθώς όπως θα φανεί και στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου, συχνά τίθεται το δίλημμα επιλογής μίας μεγάλης βάσης, ευνοϊκής για την ακρίβεια του προσανατολισμού και της ανακατασκευής, ή μίας μικρότερης που θα διευκολύνει την αυτόματη συνταύτιση λόγω μικρότερων παραμορφώσεων.

Η γεωμετρία των σφαιρικών εικόνων

Σε μία πρώτη ανάγνωση, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, ίσως κανείς να συμπεράνει ότι ο λόγος που τόσο η φωτογραμμετρική κοινότητα όσο και εκείνη της Όρασης Υπολογιστών έχουν στρέψει το ενδιαφέρον τους στις σφαιρικές εικόνες είναι γιατί αυτές μπορούν πλέον εύκολα να αποκτηθούν και να καταγράψουν σε λιγότερες λήψεις περισσότερη πληροφορία έναντι των συμβατικών. Παρ' όλα αυτά, πηγαίνοντας λίγο πιο βαθιά στην υπάρχουσα βιβλιογραφία αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο βασικός λόγος χρήσης των σφαιρικών πανοραμάτων πηγάζει από ορισμένα πλεονεκτήματα της γεωμετρίας του σφαιρικού μοντέλου που συνδέονται και επηρεάζουν άμεσα την ποιότητα της λύσης ενός από τα σημαντικότερα προβλήματα και των δύο κλάδων, αυτό του προσανατολισμού των εικόνων (*Structure from Motion – SfM*). Πράγματι, σε πολλές εργασίες αναφέρεται ότι το σφαιρικό μοντέλο είναι σε θέση να περιορίσει την αβεβαιότητα της λύσης του προσανατολισμού των εικόνων και να δώσει πιο «σταθερά» αποτελέσματα σε σχέση με τις συμβατικές εικόνες, κυρίως γιατί η κάλυψη του χώρου προς όλες τις διευθύνσεις συμβάλλει στον καλύτερο διαχωρισμό μεταξύ στροφής και μετάθεσης. Με το παραπάνω ως κοινή αφετηρία, και από τους δύο επιστημονικούς κλάδους έχουν γίνει προσπάθειες χρήσης πανοραμικών εικόνων σε αρκετές εφαρμογές που αφορούν σε ένα ή και περισσότερα στάδια της συνήθους μεθοδολογίας αυτόματου προσανατολισμού και εξαγωγής τρισδιάστατης πληροφορίας από εικόνες. Πριν από όλα όμως θα πρέπει να οριστεί το γεωμετρικό μοντέλο που περιγράφει τις εικόνες αυτές.

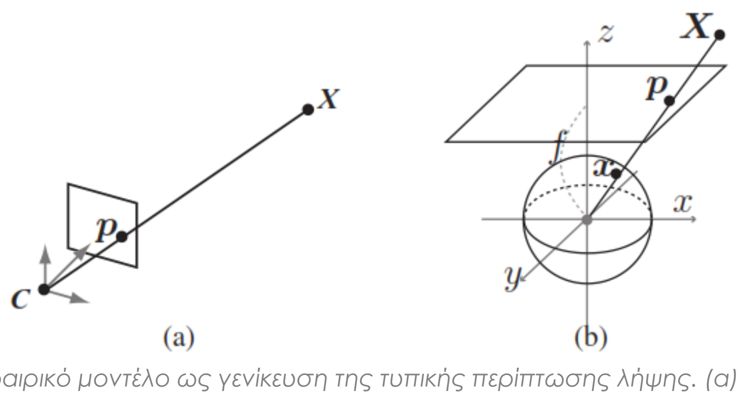
Ακόμη και πολλά χρόνια πριν από την ευρεία κυκλοφορία μηχανών για πανοραμικές εικόνες, ερευνητές ασχολήθηκαν με το γεωμετρικό μοντέλο των εικόνων αυτών, τη σύγκρισή του με το μοντέλο της κεντρικής προβολής σε επίπεδο και τα πλεονεκτήματα της σφαιρικής γεωμετρίας. Πράγματι, ήδη από το 1988 οι Nelson & Aloimonos (1988) ασχολήθηκαν με την εκτίμηση της κίνησης σφαιρικής μηχανής αξιοποιώντας την πληροφορία των διανυσμάτων οπτικής ροής (optical flow). Σημαντική παρατήρηση στην εργασία τους ήταν ότι το σφαιρικό μοντέλο πλεονεκτεί έναντι εκείνου των συμβατικών εικόνων ακριβώς γιατί όλα τα σημεία του χώρου είναι ισοδύναμα μεταξύ τους ως προς το κέντρο προβολής (δηλαδή το κέντρο της σφαίρας). Πράγματι, στη βιβλιογραφία διατυπώνεται συχνά ότι το μεγάλο οπτικό πεδίο των πανοραμικών εικόνων καθιστά την εκτίμηση της κίνησης της μηχανής λιγότερο ευαίσθητη στο θόρυβο λόγω της καλύτερης κατανομής των σημείων, απόρροια της πλήρους κάλυψης του χώρου. Άλλοι πάλι αναφέρουν το μεγάλο γωνιακό άνοιγμα των σφαιρικών εικόνων ως πλεονέκτημα, με την έννοια ότι προσφέρει μεγαλύτερες επικαλύψεις και περισσότερες ομολογίες σημείων (*Fujiki, 2008*).

Σε όλες τις περιπτώσεις, από όποια σκοπιά κι αν το δει κανείς, τα πλεονεκτήματα των σφαιρικών εικόνων απορρέουν άμεσα από το γεωμετρικό τους μοντέλο, ο ορισμός του οποίου απαιτεί μόνο τον ορισμό του σημείου λήψης. Σε αντίθεση με τις συμβατικές, η απεικόνιση ενός τρισδιάστατου σημείου του χώρου σε μία σφαιρική εικόνα ορίζεται ως η τομή της οπτικής ακτίνας, που έχει αφετηρία το κέντρο της σφαίρας και πέρας το σημείο του χώρου, με την επιφάνεια της σφαίρας. Άρα η θέση ενός σημείου του χώρου πάνω στην σφαίρα μπορεί να περιγραφεί από τις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός τρισδιάστατου συστήματος αναφοράς με αφετηρία το κέντρο της σφαίρας ή από τις δύο γεωγραφικές συντεταμένες φ και λ (*Εικόνα 11*). Να σημειωθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις η θέση ενός σημείου πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας περιγράφεται στην πραγματικότητα από δύο ανεξάρτητες παραμέτρους και άρα όλα τα σημεία ανήκουν σε έναν δισδιάστατο χώρο, μολονότι η σφαίρα αποτελεί μία τρισδιάστατη επιφάνεια.



Εικόνα 11: Η γεωμετρία του σφαιρικού μοντέλου (Torii & Imiya, 2007).

Πιο συγκεκριμένα, ακόμη και στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες, αυτές είναι μεταξύ τους εξαρτημένες καθώς το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με την ακτίνα της σφαίρας. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έχει καθιερωθεί στη βιβλιογραφία για τις σφαιρικές εικόνες να χρησιμοποιείται το μοντέλο της μοναδιαίας σφαίρας και έτσι η απεικόνιση ενός σημείου στην επιφάνεια της σφαίρας περιγράφεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Από τα παραπάνω μπορεί να αντιληφθεί κανείς ότι η έννοια «σταθερά της μηχανής» δεν εμπλέκεται στο γεωμετρικό σφαιρικό μοντέλο, καθώς η γεωμετρία της δέσμης των ακτίνων είναι ανεξάρτητη της χρησιμοποιούμενης ακτίνας της σφαίρας και σημασία έχει μόνο η διεύθυνση κάθε ακτίνας που διέρχεται από το κέντρο της. Με βάση αυτό, το σφαιρικό μοντέλο των πανοραμικών εικόνων μπορεί να θεωρηθεί μία γενίκευση όλων των μηχανών με ένα μόνο σημείο λήψης (*Εικόνα 12*).



Εικόνα 12: Το σφαιρικό μοντέλο ως γενίκευση της τυπικής περίπτωσης λήψης. (a) Η γεωμετρία της λήψης στην περίπτωση της κλασικής κεντρικής προβολής σε επίπεδο. (b) Αναπαράσταση της συμβατικής εικόνας μέσω του σφαιρικού μοντέλου. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται ότι η οπτική ακτίνα από το σημείο X του χώρου στο προβολικό κέντρο C τέμνει το επίπεδο και τη σφαίρα σε δύο σημεία, τα p και x, που αποτελούν την απεικόνιση του σημείου X στο επίπεδο της συμβατικής εικόνας και στην επιφάνεια της σφαίρας. (Torii & Imiya, 2007).

Έτσι, αν θεωρήσει λοιπόν κανείς μια σφαιρική εικόνα ως τη γενική περίπτωση μίας συμβατικής εικόνας, αντιλαμβάνεται πώς όποια πληροφορία μπορεί να εξαχθεί από ένα ζεύγος συμβατικών εικόνων μπορεί να εξαχθεί και από ένα ζεύγος σφαιρικών, με το να αξιοποιηθεί το μοντέλο και οι σχέσεις της επιπολικής γεωμετρίας χωρίς ουσιαστικά να αλλάζει κάτι.

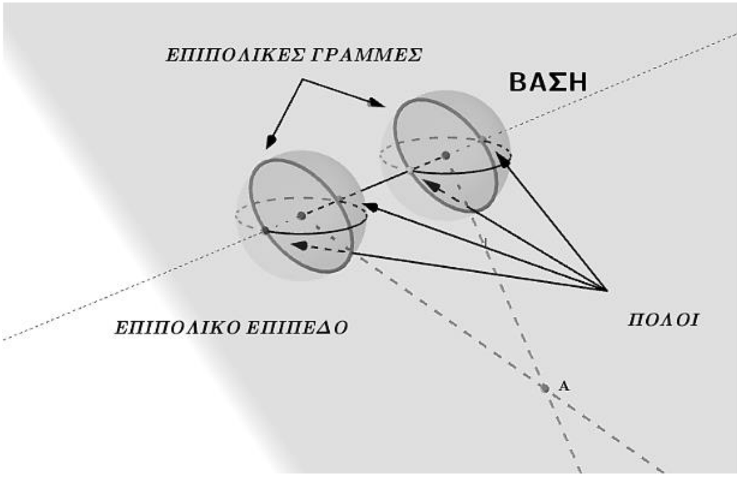
Πράγματι, η επιπολική γεωμετρία για ζεύγος σφαιρικών εικόνων περιγράφεται μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (*Essential Matrix*) και της εξίσωσης συνεπιπεδότητας με τη μορφή που ισχύει και στις συμβατικές εικόνες (και παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Η μόνη διαφορά είναι ο τρόπος που ορίζονται οι ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου στην μία και στην άλλη περίπτωση. Έτσι, ενώ στην συνήθη περίπτωση η θέση ενός σημείου περιγράφεται μέσω ομογενών συντεταγμένων εάν τεθεί η τρίτη συνιστώσα ίση με τη σταθερά της μηχανής, στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων η θέση ενός σημείου περιγράφεται από τις τρεις καρτεσιανές του συντεταγμένες (υπό τη δέσμευση της μοναδιαίας νόρμας). Τέλος, να σημειωθεί ότι, λόγω της γεωμετρίας των σφαιρικών εικόνων και του ότι όλα τα σημεία ισαπέχουν εξ ορισμού από το σημείο λήψης, δεν απαιτείται κανονικοποίηση των συντεταγμένων των σημείων όπως συνιστάται να γίνεται στις συντεταγμένες των σημείων στις συμβατικές εικόνες.

Στο ευρύτερο πλαίσιο που αφορά την περιγραφή και την διερεύνηση του σφαιρικού μοντέλου μπορεί να ενταχθεί η εργασία των *Fermüller & Aloimonos (1998)*, στην οποία εξετάζεται το πρόβλημα του προσανατολισμού των εικόνων από την σκοπιά της επίδρασης του θορύβου των παρατηρήσεων και η συμβολή των σφαιρικών εικόνων στην σταθερότητα της επίλυσης και την ανάκτηση της ορθής λύσης. Αναλυτικότερα, η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιεί μία εκτενή ανάλυση της επίδρασης των σφαλμάτων στην ανάκτηση της θέσης και του προσανατολισμού των εικόνων, εξετάζοντας ξεχωριστά την περίπτωση της σφαίρας και του επιπέδου και αποδεικνύοντας μαθηματικά ότι η σφαιρική γεωμετρία είναι πλεονεκτικότερη στην εύρεση της σωστής λύσης, ενώ η επίπεδη γεωμετρία των παραδοσιακών εικόνων πλεονεκτεί στην ανάκτηση τρισδιάστατης θέσης των σημείων του χώρου. Ενδιαφέρον στην ανάλυσή τους παρουσιάζει η ανάδειξη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ στροφής και μετάθεσης και του πώς τα σφάλματα των παρατηρήσεων επιδρούν στην ανάκτηση κάθε μίας ξεχωριστά, τόσο στο επίπεδο όσο και στη σφαίρα. Το τελευταίο συνδέεται άμεσα με όσα αναφέρθηκαν και στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με τις απόπειρες που έχουν γίνει για την διαφορετική έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας προκειμένου ο υπολογισμός της στροφής να γίνεται ανεξάρτητα από τον υπολογισμό της μετάθεσης.

Αναλυτικότερα, οι *Fermüller & Aloimonos (1998)* εξετάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις καταλήγουν ότι το πρόβλημα του προσανατολισμού παρουσιάζει μεγαλύτερη αστάθεια όταν χρησιμοποιούνται συμβατικές εικόνες. Επιπλέον, οι συγγραφείς αποδίδουν την αστάθεια αυτή κατά κύριο λόγο στη σύμφυτη σχέση που υπάρχει μεταξύ στροφής και μετάθεσης, υπονοώντας ότι το κρίσιμο στάδιο στην ανάκτηση των στοιχείων του προσανατολισμού των εικόνων δεν είναι ο υπολογισμός του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα αλλά η εξαγωγή από αυτόν του ορθού πίνακα στροφής και διανύσματος μετάθεσης. Πίσω από αυτό το κρίσιμο στάδιο διαχωρισμού στροφής και μετάθεσης βρίσκεται το πλεονέκτημα των σφαιρικών πανοραμάτων καθώς στην σφαίρα, αν υποτεθεί σφάλμα στην εκτίμηση της στροφής, αυτό δεν επηρεάζει την εκτίμηση της ορθής μετάθεσης. Έτσι, γίνεται αντιληπτό ότι αν η κίνηση της μηχανής δεσμευτεί έτσι ώστε να μην υπάρχουν στροφές, τότε η ανάκτηση της ορθής μετάθεσης θα είναι ευκολότερη στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων

Στο ίδιο πνεύμα με παραπάνω αλλά σε πιο πρακτικό επίπεδο, οι Gluckman & Nayar (1998) θίγουν κι αυτοί την ευαισθησία του προβλήματος του προσανατολισμού των εικόνων υπό την επίδραση του θορύβου και αναδεικνύουν την συμβολή της σφαιρικής γεωμετρίας στην σταθεροποίηση της λύσης. Κάνουν εκτενή αναφορά στην εσωτερική γεωμετρία διαφορετικών συστημάτων λήψης πανοραμικών εικόνων (rotating cameras, fisheye lens, catadioptric) και παραθέτουν τις εξισώσεις προβολής στη σφαίρα για εικόνες που έχουν ληφθεί από διαφορετικές πανοραμικές μηχανές ή φακούς. Να σημειωθεί ότι στις εξισώσεις αυτές, όπως είναι αναμενόμενο, εμφανίζεται και η σταθερά του εκάστοτε φακού η οποία, όπως έχει προαναφερθεί, ναι μεν δεν εμπλέκεται στη γεωμετρία της σφαιρικής εικόνας έχει όμως ληφθεί υπόψη στο στάδιο δημιουργίας της.

Επίσης σε θεωρητικό επίπεδο κινείται η εργασία των *Torii et al. (2005)* οι οποίοι μελετούν την επιπολική γεωμετρία για 2 και 3 σφαιρικές εικόνες. Συγκεκριμένα, παραθέτουν τις εξισώσεις της συνεπιπεδότητας για ζεύγος και τριάδα εικόνων και περιγράφουν τα στοιχεία της επιπολικής γεωμετρίας στη σφαίρα (*Εικόνα 13*), όπου οι βασικές διαφορές μεταξύ πανοραμάτων και συμβατικών εικόνων αφορούν τους πόλους και τη μορφή των επιπολικών γραμμών. Συγκεκριμένα, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το διάνυσμα της βάσης ζεύγους πανοραμικών εικόνων τέμνει την επιφάνεια κάθε σφαίρας σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά μεταξύ τους, κι άρα σε κάθε εικόνα εμφανίζονται δύο πόλοι και όχι ένας, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων. Επίσης, στις σφαιρικές εικόνες οι επιπολικές γραμμές δεν είναι ευθείες αλλά κύκλοι, καθώς η τομή ενός επιπέδου (εν προκειμένω του επιπολικού επιπέδου) με μία σφαίρα είναι ένας κύκλος (λαμβανομένου υπόψη ότι στο επιπολικό επίπεδο περιλαμβάνεται εξ ορισμού και το κέντρο κάθε σφαίρας).



Εικόνα 13: Η επιπολική γεωμετρία ζεύγους σφαιρικών πανοραμάτων (Τσιρώνης, 2015).

Οι *Torii & Imiya (2007)*, σε λιγότερο θεωρητικό επίπεδο, περιγράφουν και αυτοί το σφαιρικό μοντέλο, εφαρμόζοντας όμως τις εξισώσεις σε πραγματικές εικόνες. Συγκεκριμένα, αναπτύσσουν έναν αλγόριθμο που βασίζεται σε ομολογίες μεγίστων κύκλων για ζεύγος σφαιρικών εικόνων. Η προβολή ευθείας του χώρου στην επιφάνεια της σφαίρας αντιστοιχεί σε ένα τόξο κατά μήκος ενός μεγίστου κύκλου. Έτσι, με εφαρμογή ενός φίλτρου Canny στις εικόνες εντοπίζονται ευθείες του χώρου και τα ακραία σημεία των ευθειών αυτών προβάλλονται στη σφαίρα. Από τα σημεία που προκύπτουν για κάθε εικόνα με την παραπάνω διαδικασία εντοπίζονται ομόλογα σημεία με χειροκίνητο τρόπο. Η χειροκίνητη εύρεση ομολογιών πάνω στη σφαίρα θα πρέπει να υπενθυμιστεί ότι συναντάται σε αρκετές περιπτώσεις καθώς η αυτόματη συνταύτιση σε σφαιρικά πανοράματα είναι ένα ακόμα ενεργό πεδίο έρευνας.

Μέχρι το σημείο αυτό έχει γίνει αναφορά στο βασικό θεωρητικό υπόβαθρο που διέπει τα σφαιρικά πανοράματα και συνδέεται με ένα από τα βασικότερα προβλήματα τόσο της Φωτογραμμετρίας όσο και της Όρασης Υπολογιστών (προσανατολισμός των εικόνων). Η περιγραφή της επιπολικής γεωμετρίας ζεύγους πανοραμικών εικόνων καταδεικνύει ότι η βασική διαφορά μεταξύ σφαιρικών και συμβατικών εικόνων αφορά στο πώς ορίζεται η δέσμη των οπτικών ακτίνων αλλά και στο ποια είναι η μορφή της σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις. Έτσι, η συνθήκη συνεπιπεδότητας για την αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων εξακολουθεί να ισχύει και οι συνήθεις αλγόριθμοι υπολογισμού του Δεσμευμένου Επιπολικού πίνακα χρησιμοποιούνται εξίσου στις πανοραμικές εικόνες.

Εκτός όμως από τον προσανατολισμό των εικόνων, επιπλέον ζητούμενο των εφαρμογών της φωτογραμμετρίας αλλά και της όρασης υπολογιστών είναι η τρισδιάστατη ανακατασκευή σημείων του χώρου. Συνεπώς ένα δεύτερο ζήτημα αφορά την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας και το κατά πόσο αυτή επηρεάζεται από την χρήση των πανοραμικών εικόνων. Σχετικά με το τελευταίο, οι *Fermüller & Aloimonos (1998)* αναφέρουν ότι η τυπική περίπτωση κεντρικής προβολής σε επίπεδο είναι πλεονεκτικότερη για την ανάκτηση του βάθους των σημείων του χώρου, ενώ αντιθέτως η προβολή σε σφαίρα διευκολύνει την εύρεση των στοιχείων του προσανατολισμού των εικόνων.

Δύο από τις πρώτες εργασίες που πραγματεύονται την επίλυση της απλής εμπροσθοτομίας από ζεύγος πανοραμικών εικόνων είναι αυτές των *Kang & Szeliski (1997)* και *Shum et al. (1998)*. Οι πρώτοι χρησιμοποιούν κυλινδρικά πανοράματα που δημιουργούνται από μία περιστρεφόμενη μηχανή τοποθετημένη σε τρίποδο και, έχοντας ως βασικό ζητούμενο την τρισδιάστατη ανακατασκευή, εφαρμόζουν και αξιολογούν τρεις διαφορετικές μεθοδολογίες. Αναλυτικότερα, για τον προσανατολισμό των εικόνων υπολογίζουν τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα με τον αλγόριθμο των 8 σημείων, βασιζόμενοι στα διανύσματα οπτικής ροής *(optical flow)* που προκύπτουν από τον τελεστή Shi-Tomasi, αφού έχει προηγηθεί χονδρική συσχέτιση των εικόνων. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι *«ο υπολογισμός του πίνακα E είναι επαρκώς σταθερός λόγω του μεγάλου γωνιακού ανοίγματος των πανοραμάτων, υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή των σημείων είναι καλή και ότι τα σημεία είναι πολλά»*. Για το επόμενο στάδιο της ανακατασκευής, που είναι και το βασικότερο κομμάτι της εργασίας, αναφέρουν ότι η χρήση περισσότερων από δύο εικόνες είναι πιο κρίσιμη στην περίπτωση των πανοραμικών, καθώς οι πόλοι λόγω του μεγάλου γωνιακού ανοίγματος βρίσκονται μέσα στις εικόνες και άρα για τα σημεία που απεικονίζονται στις περιοχές αυτές η εμπροσθοτομία θα είναι αβέβαιη. Επιπλέον, επισημαίνουν ότι όταν οι εικόνες λαμβάνονται και από το ίδιο ύψος τότε ακόμη και η χρήση περισσότερων εικόνων δεν μπορεί να λύσει το πρόβλημα για τα σημεία που βρίσκονται στη διεύθυνση της βάσης.

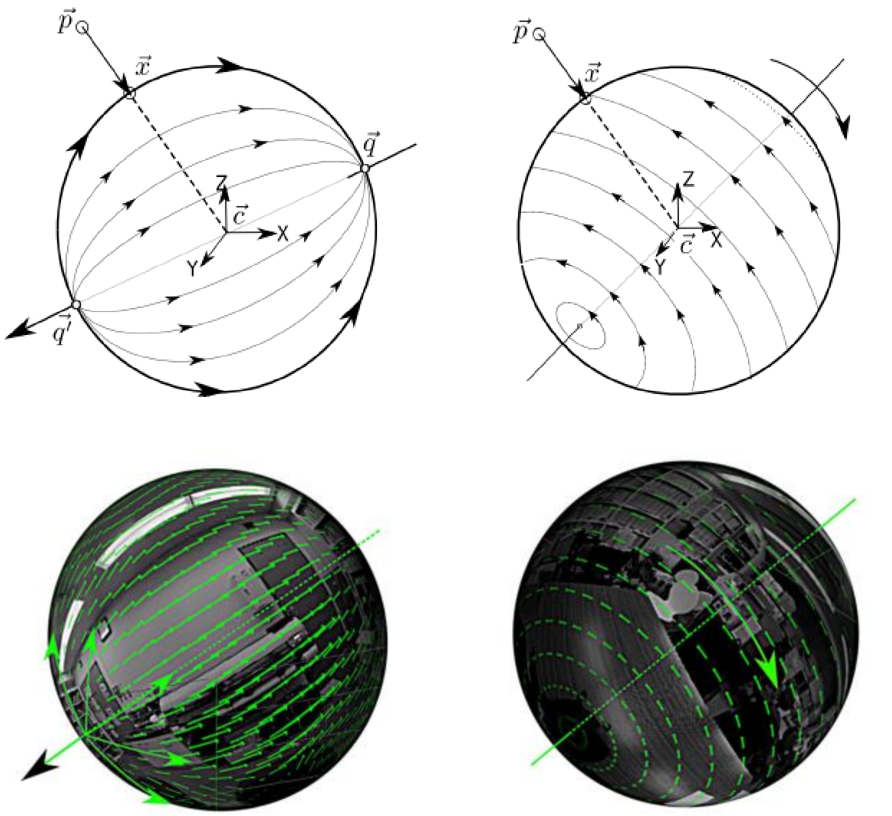
Πρακτικά, υπολογίζουν την τρισδιάστατη θέση των σημείων με 3 τρόπους, εκ των οποίων ο πρώτος είναι η επίλυση της απλής εμπροσθοτομία από ζεύγος πανοραμάτων. Στην δεύτερη περίπτωση εφαρμόζεται μία επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία γίνεται ταυτόχρονη συνόρθωση των συντεταγμένων των σημείων αλλά και των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού. Στην τρίτη περίπτωση πρακτικά χρησιμοποιείται η επιπολική δέσμευση για να βελτιστοποιηθούν οι ομολογίες που έχουν εντοπιστεί και ακολουθεί και πάλι επαναληπτική διαδικασία αντίστοιχη με προηγουμένως. Οι συγγραφείς καταλήγουν ότι τα αποτελέσματα και των τριών προτεινόμενων μεθοδολογιών είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και αναφέρουν πώς αυτό ενισχύει την άποψη ότι ο υπολογισμός της σχετικής θέσης των εικόνων με την χρήση του αλγορίθμου των 8 σημείων είναι σταθερότερος και καταλήγει στο βέλτιστο αποτέλεσμα στην περίπτωση των πανοραμικών εικόνων.

Οι *Shum et al. (1998)* αναπτύσσουν ένα γραφικό περιβάλλον που επιτρέπει στο χρήστη να δημιουργεί αρχιτεκτονικά τρισδιάστατα μοντέλα για εσωτερικούς χώρους, ανακατασκευάζοντας σημεία που επιλέγονται χειροκίνητα. Και εδώ χρησιμοποιούνται κυλινδρικά πανοράματα αλλά ο προσανατολισμός τους δεν αποκαθίσταται με την συνήθη διαδικασία (δηλαδή με αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού). Αντιθέτως, κάθε πανόραμα προσανατολίζεται στο σύστημα του χώρου με βάση διαθέσιμες γεωμετρικές δεσμεύσεις και διαχωρισμό του υπολογισμού του πίνακα στροφής και του διανύσματος της μετάθεσης.

Μία ακόμη εφαρμογή υλοποιούν οι *Sato et al. (2011),* όπου στόχος είναι η τρισδιάστατη ανακατασκευή σημείων του χώρου από ζεύγος σφαιρικών εικόνων και συγκεκριμένα από εικόνες που προέρχονται από το Google Street View Pittsburg Experimental Dataset. Να σημειωθεί ότι στην συγκεκριμένη εργασία δεν γίνεται χρήση των διαθέσιμων αρχικών τιμών για τον προσανατολισμό των εικόνων που παρέχονται από την Google. Αναλυτικότερα, για τον εντοπισμό των αρχικών ομολογιών των σημείων εφαρμόζεται ο σημειακός τελεστής SIFT στα πανοράματα, οι ομολογίες που εντοπίζονται ελέγχονται ως προς την ορθότητά τους με βάση συγκεκριμένα κατώφλια που ορίζονται για τις τιμές του προσανατολισμού και της κλίμακας που περιλαμβάνονται στον περιγραφέα κάθε χαρακτηριστικού σημείου, και υπολογίζεται ο σχετικός προσανατολισμός των εικόνων με 5 βαθμούς ελευθερίας. Αν και τα αποτελέσματά τους είναι ενθαρρυντικά, τα σφάλματα που προκύπτουν είναι μεγάλα και συγκεκριμένα της τάξεως του μέτρου. Επιπλέον, η εμπειρική επιλογή των δεσμεύσεων που επιβάλλουν αλλά και των τιμών των κατωφλίων δεν εγγυάται την σταθερότητα των αποτελεσμάτων αν η μέθοδος εφαρμοσθεί σε αρκετά διαφορετικά δεδομένα.

Μία από τις πιο πρόσφατες εφαρμογές που αφορούν τον προσανατολισμό και την εξαγωγή πληροφορίας από ζεύγος πανοραμικών εικόνων παρουσίασαν οι *Pathak et al.* (2016). Αναλυτικότερα, σχετικά με το πρώτο στάδιο, αναφέρουν ότι ο προσανατολισμός είναι ευαίσθητος στα σφάλματα όταν βασίζεται σε χαρακτηριστικά σημεία (sparse correspondences). Όπως προαναφέρθηκε, οι συγγραφείς θεωρούν ότι η εκτίμηση των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού με βάση τον υπολογισμό του **E** είναι επιρρεπής σε σφάλματα και για αυτό το λόγο τις υπολογιζόμενες τιμές τις θεωρούν αρχικές.

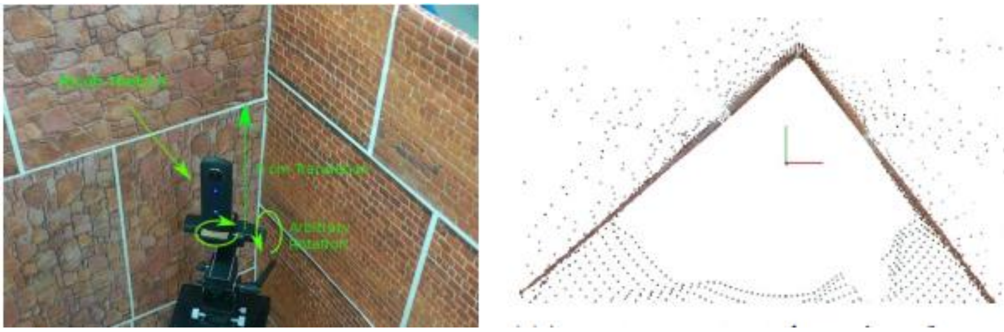
Πρακτικά στην εφαρμογή τους χρησιμοποιούν δύο εικόνες από την σφαιρική μηχανή Theta S της RICOH, οι οποίες έχουν αποθηκευτεί ψηφιακά μέσω της Ορθής Ισαπέχουσας Κυλινδρικής προβολής, και εντοπίζουν ομόλογα σημεία στις εικόνες αυτές με τον τελεστή A-KAZE. Με βάση τις ομολογίες των σημείων υπολογίζεται ο πίνακας **E** και από αυτόν εξάγονται ο πίνακας στροφής και το διάνυσμα της μετάθεσης μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών (SVD). Στη συνέχεια, με βάση τον πίνακα στροφής που υπολογίστηκε, αποκαθιστούν τον προσανατολισμό της δεύτερης εικόνας ως προς την πρώτη υλοποιώντας ουσιαστικά μία αρχική επιπολική επανασύσταση. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα διανύσματα της οπτικής ροής των εικόνων και ξεκινάει μία επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης του σχετικού προσανατολισμού, η οποία βασίζεται στα μοτίβα που ακολουθούν τα διανύσματα της οπτικής ροής ανάλογα με την σχετική θέση των δύο εικόνων (*Εικόνα 14*). Συγκεκριμένα, αν οι εικόνες έχουν υποστεί μόνο μετάθεση τότε τα διανύσματα ξεκινούν από τον ένα πόλο και καταλήγουν στον άλλον, ακολουθώντας τις επιπολικές γραμμές, δηλαδή τους μέγιστους κύκλους. Αν οι εικόνες έχουν μεταξύ τους μόνο στροφή τότε τα διανύσματα θα κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα της στροφής.



Εικόνα 14: Η μορφή των διανυσμάτων οπτικής ροής στην επιφάνεια της σφαίρας αν θεωρηθεί μόνο μετάθεση (αριστερά) και μόνο στροφή (δεξιά). Στην κάτω σειρά φαίνονται οι αντίστοιχες περιπτώσεις σε πραγματικά δεδομένα (Pathak et al., 2016).

Με βάση αυτά τα μοτίβα, είναι δυνατόν να διαχωριστεί η στροφή από τη μετάθεση αφού η δεύτερη εικόνα έχει ήδη στραφεί στο σύστημα της πρώτης και άρα τα διανύσματα της οπτικής ροής θα έπρεπε θεωρητικά να ακολουθούν το μοτίβο που αναφέρθηκε παραπάνω. Έτσι, η ποσότητα που ελαχιστοποιείται στη συνόρθωση είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος της οπτικής ροής σε κάθε σημείο με το εφαπτόμενο διάνυσμα στον μέγιστο κύκλο που διέρχεται από το σημείο. Με άλλα λόγια, τα δύο αυτά διανύσματα θα έπρεπε να ταυτίζονται αν πράγματι είχε αποκατασταθεί πλήρως η σχετική στροφή των εικόνων και άρα η γωνία των δύο διανυσμάτων αντιστοιχεί στην εναπομένουσα στροφή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου συγκλίνει η συνόρθωση και πρακτικά ελαχιστοποιηθεί η γωνία, ενώ πριν από κάθε επανάληψη γίνεται εκ νέου επιπολική επανασύσταση των εικόνων με βάση τις νέες τιμές στροφής που προέκυψαν.

Μετά την ικανοποίηση του κριτηρίου της σύγκλισης, τα τελικά διανύσματα της οπτικής ροής μπορούν να μεταφραστούν σε τιμές βάθους για κάθε σημείο. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε εικόνες που απεικονίζουν δύο επίπεδες επιφάνειες με υφή τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία (*Εικόνα 15*). Αν και στην εργασία περιλαμβάνονται εικόνες από την τελική τρισδιάστατη ανακατασκευή όπου πράγματι η γεωμετρία φαίνεται να είναι ορθή, δεν παρατίθενται ποσοτικά αποτελέσματα για αξιολόγηση της ακρίβειας.



Εικόνα 15: Η διάταξη που χρησιμοποιήθηκε για την αξιολόγηση του αλγορίθμου (αριστερά) και το αποτέλεσμα της τρισδιάστατης ανακατασκευής σε κάτοψη (δεξιά) (Pathak et al., 2016).

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, θα έλεγε κανείς ότι οι σφαιρικές εικόνες φαίνεται να πλεονεκτούν έναντι των συμβατικών στην επίλυση προβλημάτων που απασχολούν την φωτογραμμετρική κοινότητα και την κοινότητα της Όρασης Υπολογιστών. Από γεωμετρική πλευρά, η σφαιρική γεωμετρία των πανοραμάτων μπορεί να θεωρηθεί μία γενίκευση της γεωμετρίας των συμβατικών εικόνων υπό την έννοια ότι το σφαιρικό μοντέλο περιγράφει τη δέσμη των ακτίνων μέσω του ορισμού μόνο του προβολικού κέντρου (δηλαδή του κέντρου της σφαίρας). Από εκεί και πέρα, από την επιφάνεια της σφαίρας μέσω διαφορετικών μετασχηματισμών μπορούν να δημιουργηθούν διαφορετικές προβολές για την δημιουργία και αποθήκευση των ψηφιακών εικόνων. Θεωρώντας τις πανοραμικές εικόνες ως γενίκευση των συμβατικών, είναι προφανές ότι μπορεί κανείς να τις χρησιμοποιήσει σε όλα τα προβλήματα της παραδοσιακής φωτογραμμετρίας και μάλιστα έχοντας σημαντικά πλεονεκτήματα που πηγάζουν από την εξ ορισμού κάλυψη του χώρου προς όλες τις διευθύνσεις, η οποία συμβάλλει στην «φυσική» εξισορρόπηση των σφαλμάτων και στην σταθεροποίηση του προβλήματος προσανατολισμού των εικόνων, ιδίως σε ό,τι αφορά την ανάκτηση του διανύσματος της βάσης των εικόνων.

Συνήθεις Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή γίνεται μία επισκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας που αφορά την χρήση πανοραμικών εικόνων σε δύο θεμελιώδεις εφαρμογές της φωτογραμμετρίας και της όρασης υπολογιστών, στο SfM (Structure from Motion) και στο SLAM (Simultaneous Localization And Mapping). Και στις δύο περιπτώσεις το ζητούμενο είναι ο αυτόματος προσανατολισμός εικόνων με ή χωρίς ταυτόχρονη ανακατασκευή του χώρου. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων εικόνων είναι πολύ μεγάλος, και για το λόγο αυτό τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο πανοράματα ώστε να μπορέσει να επιτευχτεί το τελικό ζητούμενο με λιγότερες εικόνες. Ειδοποιός διαφορά μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κατηγορίας είναι ότι στο SfM δίνεται προτεραιότητα στην υψηλή ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος, ενώ στο SLAM στην ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου χρόνου με επιδίωξη και επιλύσεων σε πραγματικό χρόνο. Συνεπώς, αν και το τελικό ζητούμενο φαίνεται να μοιάζει αρκετά, οι προσεγγίσεις και οι μέθοδοι που υιοθετούνται σε κάθε ένα από τα δύο πεδία συχνά διαφέρουν σημαντικά. Για το λόγο αυτό στα επόμενα η παρουσίαση ης βιβλιογραφίας γίνεται ξεχωριστά.

Structure from Motion – SfM

Οι πρώτες προσπάθειες ανάκτησης της κίνησης ενός παρατηρητή και της τρισδιάστατης ανακατασκευής του χώρου μέσα στον οποίο αυτός κινείται με αξιοποίηση πληροφορίας αποκλειστικά από εικόνες χρονολογούνται από τις αρχές τις δεκαετίας του '80. Οι έρευνες εστίασαν αρχικά στο εάν υπάρχει μοναδική λύση στο πρόβλημα και στην ανάπτυξη μαθηματικών λύσεων που βασίζονταν σε ομολογίες σημείων. Εκτός από την περίπτωση των σημείων μελετήθηκαν οι περιπτώσεις χρήσης οπτικής ροής των εικόνων αλλά και της χρήσης ομόλογων ευθειών αποκλειστικά ή και σε συνδυασμό με σημεία. Μολονότι οι πρώτες έρευνες αφορούσαν μόνο την περίπτωση ενός ζεύγους εικόνων, γρήγορα οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές επεκτάθηκαν ώστε να μπορέσουν να διαχειριστούν αρχικά τρεις και στη συνέχεια ακόμα περισσότερες εικόνες.

Σήμερα, το συγκεκριμένο πρόβλημα, ευρέως γνωστό με τον όρο SfM, αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα ταυτόχρονης εύρεσης και βελτιστοποίησης του προσανατολισμού των εικόνων και των τρισδιάστατων σημείων του χώρου, παράμετροι που συνδέονται μαθηματικά μεταξύ τους μέσω της συνθήκης συγγραμμικότητας. Έτσι, η αντιμετώπιση του προβλήματος του SfM βασίζεται στην συνόρθωση των παρατηρήσεων με την μέθοδο της δέσμης (bundle adjustment), που επιλύεται επαναληπτικά έως ότου ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα επαναπροβολής των παρατηρούμενων σημείων. Η μη γραμμικότητα του προβλήματος προφανώς απαιτεί εκτίμηση αρχικών τιμών για τους αγνώστους και ακριβώς σε αυτό το στάδιο εμπλέκεται η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, που αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

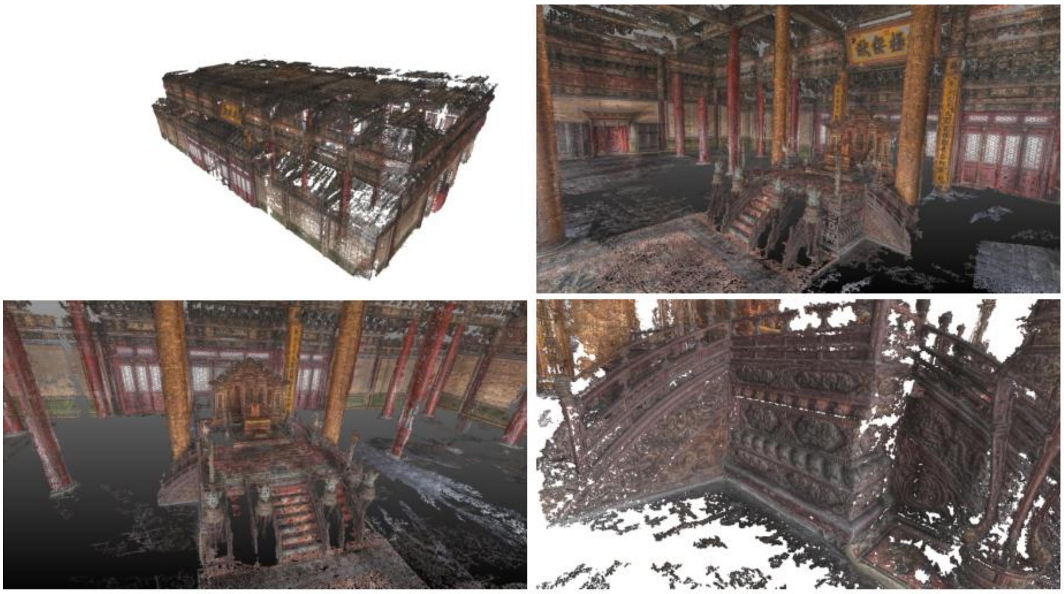
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η αρχική εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων για τον προσανατολισμό των εικόνων από ομολογίες σημείων είναι πολύ ευαίσθητη στην παρουσία θορύβου, ειδικά στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων. Το πρόβλημα του θορύβου στις εφαρμογές SfM αντιμετωπίζεται με τη χρήση σημειακών τελεστών ικανών να εντοπίζουν μεγάλο αριθμό ορθών ομόλογων σημείων πάνω στις συμβατικές εικόνες, με την εφαρμογή του RANSAC για τον εντοπισμό και την απόρριψη χονδροειδών σφαλμάτων ώστε να μην επηρεαστούν οι αρχικές τιμές των αγνώστων, και τέλος με την βελτιστοποίηση της λύσης επαναληπτικά. Συνεπώς, στην περίπτωση του SfM το πλεονέκτημα των σφαιρικών εικόνων που αφορά στην μείωση της αβεβαιότητας προσανατολισμού των εικόνων (και κυρίως εκτίμησης των στροφών) φαίνεται να μην είναι τόσο σημαντικό, καθώς η επιδιωκόμενη ακρίβεια θα επιτευχθεί έτσι κι αλλιώς μέσω της επαναληπτικής βελτιστοποίησης της λύσης. Αυτό που είναι ιδιαιτέρως σημαντικό είναι η μείωση του αριθμού των εικόνων καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις οι χρησιμοποιούμενες εικόνες είναι πολλές και συχνά δίνονται σε τυχαία σειρά. Έτσι, η χρήση πανοραμικών διευκολύνει το στάδιο της αρχικοποίησης των θέσεων των εικόνων, μειώνει τους απαιτούμενους χρόνους και επιπλέον συμβάλλει στην σταθερότητα της λύσης της συνόρθωσης μειώνοντας τον αριθμό των αγνώστων.

Σήμερα, η πολυετής έρευνα στο αντικείμενο του SfM έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη ολοκληρωμένων αλγορίθμων που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα συνολικά με πλήρως αυτόματο τρόπο και πλέον είναι διαθέσιμοι είτε ως εμπορικά λογισμικά είτε ως λογισμικά ανοικτού κώδικα. Αν και τα λογισμικά αυτά είναι σε θέση να προσανατολίσουν με πολύ καλά αποτελέσματα πολύ μεγάλο αριθμό εικόνων, μέχρι πρότινος μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν μόνο συμβατικές εικόνες, και αυτό γιατί η συντριπτική πλειοψηφία της ερευνητικής δραστηριότητας στο πεδίο αυτό αφορούσε αποκλειστικά την περίπτωση της κεντρικής προβολής στο επίπεδο. Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται αυξημένο ενδιαφέρον για την χρήση των πανοραμικών εικόνων και στο πεδίο αυτό, γεγονός που αποδεικνύεται από την πρόσφατη βιβλιογραφία αλλά και από την ενσωμάτωση μοντέλων για υπερευρυγώνιους φακούς και σφαιρικές μηχανές σε εμπορικά λογισμικά SfM.

Μία από τις πρώτες εφαρμογές SfM σε πανοραμικές εικόνες ήταν αυτή των *Kangni & Laganiere (2007)*. Στην εργασία τους χρησιμοποίησαν τις εικόνες από την πανοραμική μηχανή Lady Bug της Point Gray και υπολόγισαν τον προσανατολισμό των εικόνων και την γεωμετρία του χώρου υλοποιώντας τα συνήθη δύο βήματα: εκτίμηση αρχικών τιμών για τους αγνώστους μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα και επαναληπτική βελτιστοποίηση των τιμών των αγνώστων με τη μέθοδο της δέσμης εφαρμόζοντας την τεχνική της προσθήκης νέων εικόνων στη συνόρθωση σταδιακά (*incremental bundle adjustment*). Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι οι αρχικές τιμές για τις σχετικές στροφές και τις μεταθέσεις των εικόνων δεν εξάγονται και οι δύο από τον πίνακα **E** εφαρμόζοντας SVD. Αντιθέτως, με αυτό τον τρόπο υπολογίζονται μόνο οι αρχικές τιμές για τις στροφές, ενώ οι θέσεις των εικόνων υπολογίζονται από τα τρισδιάστατα σημεία του χώρου. Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση των προσανατολισμών των εικόνων με βάση την επιπολική γεωμετρία βελτιώνει την ποιότητα των αρχικών τιμών για τις στροφές, το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι το σφαιρικό μοντέλο είναι πλεονεκτικότερο στην ανάκτηση των στροφών αποκλειστικά από ομολογίες σημείων.

Οι *Torii & Havlena (2009)* παρουσίασαν μία πιο ολοκληρωμένη εργασία πάνω στην χρήση πανοραμικών εικόνων για SfM, τόσο από την πλευρά του πλήθους των εικόνων όσο και από την πλευρά των αποτελεσμάτων και των στοιχείων που παραθέτουν στην εργασία τους. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησαν περίπου 2500 εικόνες από τα σφαιρικά πανοράματα της Google σε Ορθή Ισαπέχουσα Κυλινδρική προβολή χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τις αρχικές τιμές για τους προσανατολισμούς από τα διαθέσιμα στοιχεία της Google αλλά υπολογίζοντάς τους από μηδενική βάση μέσω ομόλογων σημείων για την εκτίμηση του **E**. Στη συνέχεια, από τον πίνακα **E** υπολογίζονταν κατά τα γνωστά ο πίνακας στροφής και το διάνυσμα της μετάθεσης, ενώ η κλίμακα του μοντέλου προέκυπτε τελικά από τα τρισδιάστατα σημεία που είναι ορατά σε τρεις εικόνες κάθε φορά. Στο στάδιο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι, για την αποφυγή προβλημάτων στη δέσμευση της κλίμακας από τα τρισδιάστατα σημεία, σημεία με μεγάλη αβεβαιότητα θέσης (π.χ. σημεία του ορίζοντα) απορρίπτονταν μέσω μίας διαδικασίας RANSAC.

Οι *Pagani et al. (2011)* παρουσίασαν επίσης έναν αλγόριθμο SfM για σφαιρικές εικόνες, σε πολύ μικρότερη όμως κλίμακα από ό,τι οι προηγούμενοι αλλά με απαιτητικό αντικείμενο από πλευράς γεωμετρίας. Αναλυτικότερα, εδώ ο στόχος ήταν ο προσανατολισμός και τελικά η ανακατασκευή του εσωτερικού ενός ναού από περίπου 100 σφαιρικές εικόνες. Δυστυχώς στην εργασία τους δεν παρατίθενται επαρκή ποσοτικά στοιχεία για τα αποτελέσματα της μεθόδου παρά μόνο εικόνες από το τελικό τρισδιάστατο νέφος σημείων (Εικόνα 16) που αποτελούνταν από περίπου 100 εκ. σημεία (χωρίς όμως να δίνονται στοιχεία για την ακρίβεια ή τους χρόνους εκτέλεσης).



Εικόνα 16: Η τελική τρισδιάστατη ανακατασκευή του εσωτερικού του ναού (Pagani et al., 2011).

Αν και οι παραπάνω εφαρμογές είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν εξαντλούν το πλήθος των εργασιών που αφορούν σε SfM με χρήση σφαιρικών εικόνων, καταδεικνύουν ότι τα τελευταία χρόνια πράγματι υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον και προσπάθειες χρήσης των πανοραμικών εικόνων και σε εφαρμογές SfM. Μολονότι η ακρίβεια που επιτυγχάνεται μέσω της συνόρθωσης της δέσμης και της διενέργειας επαναλήψεων είναι πολύ υψηλή σήμερα και στις περιπτώσεις των συμβατικών εικόνων, η χρήση των πανοραμικών εικόνων μπορεί να συμβάλλει στην ορθότερη εκτίμηση αρχικών τιμών και άρα στη μείωση του αριθμού των επαναλήψεων αλλά και στη χρήση λιγότερων εικόνων. Τα δύο παραπάνω στοιχεία μπορούν να περιορίσουν τους απαιτούμενους χρόνους εκτέλεσης των αλγορίθμων και να συμβάλουν στην επίτευξη επίλυσης του φωτοτριγωνισμού σε πραγματικό χρόνο, που αποτελεί ένα βασικό ζητούμενο στις μέρες μας.

Simultaneous Localization And Mapping - SLAM

Όπως λέει και το όνομα των αλγορίθμων SLAM (Simultaneous Localization And Mapping), στόχος τους είναι ο ταυτόχρονος προσδιορισμός της θέσης ενός κινούμενου αντικειμένου και η χαρτογράφηση του περιβάλλοντος στο οποίο κινείται. Όταν το μέσο για να επιτευχθεί αυτό είναι αποκλειστικά μία οπτική μηχανή, τότε πρόκειται για μία ειδική κατηγορία αλγορίθμων που αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως Visual SLAM, ή Monocular SLAM. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, ο στόχος είναι ο εντοπισμός της θέσης της κινούμενης μηχανής και η ταυτόχρονη ανακατασκευή του περιβάλλοντος χώρου από τις εικόνες. Έτσι είναι προφανής η ομοιότητα ή καλύτερα η σύνδεση των αλγορίθμων SLAM με εκείνους του SfM, καθώς και στις δύο περιπτώσεις το τελικό ζητούμενο είναι το ίδιο. Αυτός είναι και ο λόγος που κάποιοι στη βιβλιογραφία αναφέρουν το SLAM ως μία ειδική κατηγορία του SfM, και συγκεκριμένα ως την εκδοχή του SfM που επιλύεται σε πραγματικό χρόνο. Αν και πράγματι η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο είναι οι απαιτούμενοι χρόνοι, κρίνεται ορθότερο τα δύο αυτά πεδία να μην συγχέονται καθώς υπάρχουν κι άλλες διαφορές μεταξύ τους. Μία από τις σημαντικότερες είναι η ακρίβεια της κάθε διαδικασίας, καθώς συχνά οι αλγόριθμοι SLAM έχουν χαμηλότερες απαιτήσεις ακρίβειας με δεδομένο ότι το ζητούμενο είναι η πλοήγηση στο χώρο και όχι η παραγωγή ενός μετρητικού προϊόντος. Σε σύνδεση με τα δύο προηγούμενα, μία ακόμα διαφορά είναι ότι στους αλγορίθμους SLAM συνήθως δεν εφαρμόζονται επαναληπτικές διαδικασίες και συνόρθωση των παρατηρήσεων, αφού όπως προαναφέρθηκε προτεραιότητα δίνεται στην ταχύτητα της επίλυσης κι όχι στην ακρίβεια. Παρ' όλα αυτά, ακόμη κι όταν γίνονται διαδικασίες βελτιστοποίησης των υπολογιζόμενων θέσεων της μηχανής και του χάρτη του χώρου, αυτές αφορούν τμήματα της διαδρομής (loop closure) που διανύεται και όχι το σύνολο των εικόνων όπως γίνεται στην περίπτωση του SfM με την μέθοδο της δέσμης.

Ένας ακόμη όρος που εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία είναι το Visual Odometry, αντικείμενο το οποίο ομοιάζει πολύ με τις μεθόδους του Visual SLAM. Στην περίπτωση του Visual Odometry στόχος και πάλι είναι ο προσδιορισμός της διαδρομής της μηχανής από πληροφορία μόνο από τις εικόνες, και για το λόγο αυτό ορισμένοι θεωρούν τα δύο αντικείμενα ένα και το αυτό (*Tardif et al., 2008*). Από την άλλη πλευρά, οι *Scaramuzza & Fraundorfer (2011)* διακρίνουν τα δύο αντικείμενα με βάση δύο χαρακτηριστικά. Αρχικά αναφέρουν ότι ζητούμενο του Visual Odometry είναι η ανάκτηση της διαδρομής της μηχανής αποκλειστικά και όχι η ανακατασκευή του χώρου όπως στο SLAM. Τη δεύτερη διαφορά την εντοπίζουν στο ζήτημα της συνοχής των θέσεων της διαδρομής που υπολογίζονται με το χάρτη που κατασκευάζεται, υποστηρίζοντας ότι το Visual SLAM απαιτεί καθολική συνέπεια των θέσεων της μηχανής και του περιβάλλοντος ενώ το Visual Odometry ενδιαφέρεται για τη διατήρηση της συνέπειας των θέσεων σε τοπικό επίπεδο. Με άλλα λόγια, το Visual SLAM παρουσιάζεται ως πιο ακριβές από ό,τι το Visual Odometry καθώς απαιτεί το σύνολο των εικόνων που προσανατολίζονται να είναι συμβατό με την ανακατασκευή του χώρου που προκύπτει από κάθε μία εικόνα. Το τελευταίο σχετίζεται και με την ανάγκη που υπάρχει στο SLAM να μπορεί να αναγνωριστεί πότε και εάν η μηχανή διέρχεται από ένα σημείο στο οποίο βρέθηκε και σε προηγούμενο χρόνο. Από την άλλη πλευρά, οι ίδιοι παρουσιάζουν το Visual Odometry ως μία ταχύτερη διαδικασία κατά την οποία υπολογίζονται σταδιακά, η μία μετά την άλλη, οι διαδοχικές θέσεις της μηχανής.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, θα έλεγε κανείς ότι οι μέθοδοι Visual SLAM αφορούν τον προσανατολισμό εικόνων από κινούμενη μηχανή και την ταυτόχρονη ανακατασκευή σημείων του χώρου σε πραγματικό χρόνο, έχοντας μειωμένες απαιτήσεις ακριβείας σε σύγκριση με τους αλγορίθμους SfM. Πριν από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά την χρήση πανοραμικών εικόνων σε εφαρμογές Visual SLAM, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν δύο όροι που συναντώνται συχνά στο συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο. Ο πρώτος όρος είναι το *drift* (σφάλμα ολίσθησης) και αναφέρεται στο σφάλμα που μεταδίδεται σταδιακά από θέση σε θέση καθώς ο προσανατολισμός κάθε νέας εικόνας βασίζεται στις προηγούμενες. Το σωρευτικό αυτό σφάλμα, που οφείλεται στο γεγονός ότι δεν εφαρμόζεται ταυτόχρονη βελτιστοποίηση των θέσεων όλων των εικόνων (όπως γίνεται στην περίπτωση του SfM με την μέθοδο της δέσμης), αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα των μεθόδων SLAM και συχνά η αξιολόγηση ενός αλγορίθμου γίνεται με βάση το πόσο περιορίζεται το σφάλμα αυτό. Ο δεύτερος όρος, ο οποίος είναι άμεσα συνδεδεμένος με τον πρώτο, είναι η οριζόντια κίνηση (planar motion) που στόχο έχει την μείωση του αριθμού των αγνώστων και άρα τον περιορισμό του σφάλματος. Αναλυτικότερα, σε αρκετές εφαρμογές Visual SLAM συχνά γίνεται η θεώρηση οριζόντιας κίνησης της μηχανής που μεταφράζεται στην παραδοχή ότι η μηχανή κινείται σε ένα οριζόντιο επίπεδο και άρα οι στροφές περί τους άξονες X και Y είναι μηδενικές. Η παραδοχή αυτή ισχύει σε μεγάλο βαθμό καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις το οδόστρωμα (για τις εφαρμογές σε εξωτερικό χώρο) ή το δάπεδο (για τις εφαρμογές σε εσωτερικό χώρο) είναι επίπεδα. Παρ' όλα αυτά, όπως θα φανεί και από τα επόμενα, συχνά ανωμαλίες του οδοστρώματος και αναταράξεις του οχήματος οδηγούν στην παραβίαση της παραπάνω συνθήκης αυξάνοντας το σφάλμα. Αξίζει να επισημανθεί ότι και αυτή η τακτική που υιοθετείται σε πολλές εφαρμογές στόχο έχει να περιορίσει τις άγνωστες στροφές, που όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι και εκείνες που ανακτώνται πιο δύσκολα.

Η συνήθης πρακτική για τα προβλήματα Visual SLAM είναι να προσανατολιστούν οι δύο πρώτες εικόνες με υπολογισμό του πίνακα **E** και εξαγωγή από αυτόν του πίνακα στροφής και του διανύσματος της μετάθεσης με SVD, και έπειτα να υπολογιστούν οι θέσεις των σημείων του χώρου με απλή εμπροσθοτομία. Η επόμενη (και κάθε νέα) εικόνα προσανατολίζεται στη συνέχεια με βάση τα σημεία του χώρου που έχουν ήδη ανακατασκευαστεί και είναι ορατά σε αυτήν, ουσιαστικά με το να επιλύεται το γνωστό στην φωτογραμμετρική κοινότητα πρόβλημα της οπισθοτομίας. Αν και η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά απλή τόσο στην κατανόηση όσο και στην υλοποίησή της, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αβεβαιότητα του προσανατολισμού των εικόνων με βάση τα τρισδιάστατα σημεία και όχι τις ομολογίες οδηγεί σε μεγαλύτερα σφάλματα (*Scaramuzza & Fraundorfer, 2011*).

Οι *Aly & Bouguet (2012)* στην εργασία τους παρουσιάζουν μία εφαρμογή για τον αυτόματο προσανατολισμό πανοραμικών εικόνων που έχουν ληφθεί σε εσωτερικό χώρο. Η εφαρμογή τους μπορεί να ενταχθεί στην ενότητα των αλγορίθμων SLAM υπό την έννοια ότι ο προσανατολισμός των εικόνων γίνεται σε πραγματικό χρόνο και χωρίς βελτιστοποίηση των εκτιμώμενων παραμέτρων με τη μέθοδο της δέσμης. Από την άλλη πλευρά, η εφαρμογή διαφοροποιείται από τις εφαρμογές SLAM σε αρκετά σημεία, ήδη από το γεγονός ότι αντί για εικόνες από video χρησιμοποιούν σφαιρικές εικόνες που έχουν προκύψει από περιστρεφόμενη μηχανή τοποθετημένη σε τρίποδα, και άρα οι βάσεις των στερεοζεύγων είναι μεγαλύτερες από ό,τι συνήθως αλλά και ο αριθμός των εικόνων μικρότερος από ό,τι συνήθως. Επιπλέον, οι εικόνες δίνονται στον αλγόριθμο με άγνωστη σειρά, κάτι που συναντάται στους αλγορίθμους SfM και σπάνια σε αλγορίθμους SLAM. Από την άλλη πλευρά, στόχος είναι να υπολογιστεί η θέση των εικόνων υπό την δέσμευση της οριζόντιας κίνησης και άρα να υπολογιστεί μόνο η στροφή περί τον κατακόρυφο άξονα. Να σημειωθεί ότι η παραδοχή αυτή ευσταθεί σε μεγάλο βαθμό καθώς οι λήψεις έχουν γίνει με τρίποδα σε εσωτερικό περιβάλλον. Η εργασία τους εστιάζει κυρίως στην σύγκριση και αξιολόγηση διαφορετικών παραμέτρων που εμπλέκονται σε έναν αλγόριθμο SLAM ώστε να διαπιστωθεί πώς επιδρούν στο αποτέλεσμα. Έτσι, συγκρίνουν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικούς τελεστές για τον εντοπισμό χαρακτηριστικών σημείων (Hessian Affine, Harris Affine, MSER με SIFT descriptor) και τρεις διαφορετικές προβολές για τις σφαιρικές εικόνες (Ορθή Κυλινδρική Ισαπέχουσα, Κυβικό πανόραμα, Κυλινδρικό πανόραμα). Επιπλέον, συγκρίνουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν αν ο προσανατολισμός των εικόνων βασιστεί σε διαδοχικά ζεύγη ή τριάδες, καταλήγοντας ότι η πρώτη προσέγγιση έχει καλύτερα αποτελέσματα, καθώς συχνά οι διαθέσιμες ομολογίες σημείων μεταξύ τριών εικόνων είναι πολύ λίγες για τον ορθό υπολογισμό του trifocal tensor.

Αντίθετα με τη συνήθη πρακτική, οι *Tardif et al. (2008)* ακολουθούν μία διαφορετική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, ανέπτυξαν μία εφαρμογή Visual SLAM που χρησιμοποιεί εικόνες από την πανοραμική μηχανή Ladybug της Point Gray, χωρίς να επιβάλλεται καμία δέσμευση στην κίνηση του οχήματος. Οι συγγραφείς αναφέρουν και αυτοί ότι ένα από τα βασικά προβλήματα του Visual SLAM είναι το σωρευτικό σφάλμα το οποίο προφανώς όσο περνάει η ώρα και αυξάνει το μήκος της διαδρομής μεγαλώνει. Με δεδομένο ότι επιχειρούν να εφαρμόσουν την μέθοδό τους σε εικόνες μήκους διαδρομής 2.5 km (απόσταση που θεωρείται μεγάλη αν ληφθεί υπόψη ότι δεν γίνεται καμία βελτιστοποίηση των θέσεων που υπολογίζονται), υποστηρίζουν ότι το μεγάλο γωνιακό εύρος των πανοραμικών εικόνων είναι σε θέση να περιορίσει σημαντικά το σφάλμα, συμβάλλοντας στην σταθεροποίηση της επίλυσης του προσανατολισμού των εικόνων.

Αναλυτικότερα, στην εργασία τους για κάθε νέα εικόνα υπολογίζεται ο πίνακας **E** με την προηγούμενη και από αυτόν εξάγεται ο πίνακας στροφής, ενώ το διάνυσμα της μετάθεσης υπολογίζεται ξεχωριστά με βάση τα τρισδιάστατα σημεία. Για να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη ακρίβεια, τρισδιάστατα σημεία πολύ μακριά από τη μηχανή δεν χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της μετάθεσης, και επιπλέον για σημεία που μετά από τον προσανατολισμό μίας νέας εικόνας διαπιστωθεί ότι είναι πιο κοντά σε αυτήν από ό,τι στις προηγούμενες, η θέση τους στο χώρο επαναϋπολογίζεται από το τελευταίο ζεύγος εικόνων. Η προσέγγιση αυτή υποστηρίζουν ότι περιορίζει τη μετάδοση σφαλμάτων αφού η στροφή προκύπτει ανεξάρτητα από τη μετάθεση, με βάση τον εκ νέου υπολογισμό του πίνακα **E**, και άρα δεν μεταφέρεται σφάλμα από το προηγούμενο ζεύγος. Επιπλέον, η μεθοδολογία αυτή δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά σημεία για τον υπολογισμό της στροφής και διαφορετικά για τον υπολογισμό της μετάθεσης. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σημεία του ορίζοντα για τον υπολογισμό της στροφής συμβάλλοντας στην ακρίβεια του αποτελέσματος αλλά τα αντίστοιχα τρισδιάστατα σημεία να μην χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της μετάθεσης και άρα να μην επηρεάζουν αρνητικά το αποτέλεσμα.

Οι *Scaramuzza & Siegwart (2008)* παρουσίασαν μία ενδιαφέρουσα μεθοδολογική προσέγγιση που εντάσσεται στο πλαίσιο του Visual SLAM αλλά ταυτόχρονα διαφοροποιείται από την συνήθη πρακτική σε αρκετά σημεία. Βασικά στοιχεία της μεθόδου τους είναι ότι αντί για τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα ο προσανατολισμός των εικόνων βασίζεται στον υπολογισμό των παραμέτρων ενός προβολικού μετασχηματισμού, ότι επιβάλουν την δέσμευση για οριζόντια κίνηση και ότι διαχωρίζουν και αυτοί τον υπολογισμό της στροφής από τη μετάθεση.

Στην πράξη χρησιμοποιούν εικόνες από μία πανοραμική μηχανή και σε αυτές εφαρμόζεται ο τελεστής SIFT. Στη συνέχεια από το σύνολο των ομολογιών διατηρούνται μόνο τα σημεία που ανήκουν στο επίπεδο του δρόμου, με υπολογισμό ενός προβολικού μετασχηματισμού μέσω RANSAC. Αφού προκύψουν τελικά μόνο τα σημεία του δρόμου, υπολογίζεται από αυτά ο πίνακας της ομογραφίας που συνδέει τις δύο εικόνες και από αυτόν εξάγονται η τιμή της οριζόντιας στροφής και η μετάθεση. Προκειμένου να περιορίσουν το σφάλμα, από το παραπάνω στάδιο τελικά διατηρείται μόνο η μετάθεση η οποία εξάγεται από τον πίνακα της ομογραφίας με δύο μεθόδους (μέθοδος του Triggs και Ευκλείδεια μέθοδος) ανάλογα με την κατανομή των σημείων. Για τον υπολογισμό της στροφής δεν χρησιμοποιούνται οι ομολογίες των σημείων, καθώς η εκτίμηση από αυτές όπως αναφέρουν οι συγγραφείς είναι πολύ ευαίσθητη στο θόρυβο. Αντίθετα, η στροφή υπολογίζεται με βάση ένα τμήμα της εικόνας και συγκεκριμένα ένα μικρό τετράγωνο παράθυρο στο κέντρο της. Με την παραδοχή ότι η μηχανή κινείται οριζόντια, η στροφή μεταξύ δύο διαδοχικών εικόνων οδηγεί στην μετατόπιση της θέσης του παραθύρου κατά τη διεύθυνση των στηλών στη δεύτερη εικόνα. Άρα, επιχειρείται να ταυτιστεί το παράθυρο της πρώτης εικόνας με μία αντίστοιχη περιοχή της δεύτερης, και από τη διαφορά των στηλών υπολογίζεται η στροφή. Διευκρινίζεται ότι στην πραγματικότητα μεταξύ των εικόνων υπάρχει προφανώς και μετάθεση, παρ' όλα αυτά οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι εάν το παράθυρο είναι μικρό σε μέγεθος, βρίσκεται στο κέντρο του πανοράματος και ταυτόχρονα ο ρυθμός συλλογής του video είναι υψηλός, τότε η επίδραση της μετάθεσης δεν είναι αισθητή.

Στις προηγούμενες εργασίες είναι φανερή η προσπάθεια διαχωρισμού του υπολογισμού της στροφής από την μετάθεση η οποία επιτυγχάνεται με διάφορους τρόπους. Έτσι, είτε ο διαχωρισμός βασίζεται στην αξιολόγηση και την επιλογή κατάλληλων σημείων για τη στροφή και τη μετάθεση ξεχωριστά είτε βασίζεται σε παραδοχές για την κίνηση της μηχανής και τη γεωμετρία του τμημάτων του χώρου που απεικονίζονται (π.χ. το επίπεδο του οδοστρώματος), αυτό που επιτυγχάνεται είναι να μην επηρεαστεί η εκτίμηση της μετάθεσης από τυχόν σφάλματα στην εκτίμηση της στροφής. Όμως θα πρέπει να επισημανθεί ότι όλες οι παραπάνω προσεγγίσεις βασίζονται σε κάποιου είδους διερεύνηση κάθε φορά και επιλογή ενός «μοντέλου» κατά περίπτωση (model selection) και άρα δεν έχουν καθολική εφαρμογή.

Στην εργασία των *Micusik & Kosecka (2009)* χρησιμοποιούνται και πάλι εικόνες από την πανοραμική μηχανή Lady Bug με στόχο τον προσανατολισμό τους σε πραγματικό χρόνο και χωρίς την επιβολή δεσμεύσεων στην κίνηση. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι οι πανοραμικές εικόνες στο αστικό περιβάλλον υπερτερούν σημαντικά έναντι των κλασικών, καθώς οι δεύτερες συχνά απεικονίζουν στο μεγαλύτερο μέρος τους μόνο ένα επίπεδο (όψη κτηρίου ή δρόμος), καθιστώντας αδύνατη την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, αλλά και ότι οι εικόνες συχνά διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους λόγω αποκρύψεων από κινούμενα αντικείμενα. Έτσι θεωρούν ότι το μεγάλο οπτικό πεδίο των πανοραμικών εικόνων μπορεί να συμβάλλει δραστικά στην αποφυγή τέτοιων προβλημάτων. Στην πράξη, αφού εντοπιστούν οι ομολογίες των σημείων, προκύπτει ο πίνακας **E**, ο υπολογισμός του οποίου θεωρείται από τους συγγραφείς ότι είναι πολύ πιο σταθερός στις σφαιρικές εικόνες λόγω καλύτερης κατανομής των σημείων στο χώρο, η οποία συμβάλλει θετικά κυρίως στον υπολογισμό της στροφής. Κατά τα άλλα η προσέγγισή τους ακολουθεί τη συνήθη πρακτική σύμφωνα με την οποία ο ζητούμενος πίνακας στροφής και η διεύθυνση της βάσης εξάγονται από τον πίνακα **E** για κάθε ζεύγος εικόνων. Για την ανάκτηση της κλίμακας, δεσμεύουν το μέτρο της πρώτης βάσης ίσο με τη μονάδα και στη συνέχεια για κάθε νέα εικόνα που προστίθεται υπολογίζεται η τρισδιάστατη θέση ενός σημείου που φαίνεται σε αυτήν αλλά και στο προηγούμενο ζεύγος.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, και γενικά σε περιπτώσεις όπου δεν εφαρμόζεται καμία διαδικασία βελτιστοποίησης των εκτιμώμενων παραμέτρων, η θεώρηση της οριζόντιας κίνησης θα ήταν πιο χρήσιμη καθώς θα συνέβαλε στην σταθερότητα επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων όχι μόνο μέσω της μείωσης του αριθμού των αγνώστων γενικά αλλά γιατί θα περιόριζε συγκεκριμένα τις άγνωστες στροφές, ο υπολογισμός των οποίων ενέχει μεγαλύτερα σφάλματα. Αντί όμως της παραπάνω παραδοχής, οι συγγραφείς επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν σφαιρικές εικόνες θεωρώντας ότι το μεγάλο οπτικό τους πεδίο εγγυάται την σταθερή επίλυση του προσανατολισμού των εικόνων (*Tardif et al., 2008*).

Οι προηγούμενες εργασίες, αν κι έχουν αρκετές διαφορές μεταξύ τους, παρουσιάζουν ομοιότητες σε βασικά σημεία, γεγονός που επιτρέπει να ενταχθούν όλες στην ευρύτερη κατηγορία των αλγορίθμων Visual SLAM. Τα βασικά αυτά σημεία συνοψίζονται στη μη χρήση αρχικών τιμών από άλλους αισθητήρες και άρα στον υπολογισμό της θέσης της μηχανής με πληροφορία αποκλειστικά από τις εικόνες, στην απουσία συνόρθωσης των παρατηρήσεων για βελτιστοποίηση των τιμών των αγνώστων και στην εκτέλεση των αλγορίθμων σε πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, σημεία που έχουν ενδιαφέρον και αξίζει να επισημανθούν είναι η παραδοχή της οριζόντιας κίνησης, ο έλεγχος της συνοχής των υπολογιζόμενων θέσεων με τα σημεία του χώρου σε τοπικό επίπεδο (που συνηθέστερα γίνεται μέσω της τεχνικής του «κλεισίματος βρόχων» - *loop closing*) και το σωρευτικό σφάλμα (*drift*) που αυξάνει με το μήκος της διαδρομής.

Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να σημειώσει κανείς ότι το μήκος της διαδρομής αλλά και η διαδρομή αυτή καθεαυτή δεν επηρεάζει μόνο το σωρευτικό σφάλμα αλλά και τις δυνατότητες ελέγχου της τοπικής συνοχής της επίλυσης. Είναι προφανές ότι αν και η τεχνική του κλεισίματος βρόχων είναι συνήθης πρακτική στους αλγορίθμους Visual SLAM, για να καταστεί εφικτή θα πρέπει να το επιτρέπει και η ακολουθούμενη διαδρομή της μηχανής. Με άλλα λόγια, θα πρέπει το όχημα να κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε να διέρχεται από κάποια σημεία περισσότερες από μία φορές ώστε να δημιουργούνται οι βρόχοι. Επιπλέον, η τελική ακρίβεια εξαρτάται και από το μέγεθος των δημιουργούμενων βρόχων καθώς κλειστές διαδρομές με μικρότερο μήκος αυξάνουν την τελική ακρίβεια. Αντιθέτως, αν οι εικόνες λαμβάνονται χωρίς το όχημα να διέρχεται από ίδιες θέσεις τότε το σφάλμα αναμένεται να είναι μεγαλύτερο.

Αξιοποίηση των πανοραμικών εικόνων της Google

Η συλλογή των πανοραμικών εικόνων του Street View της Google είναι αδιαμφισβήτητα μία τεράστια πηγή πληροφοριών σε παγκόσμια κλίμακα, διαθέσιμη μέσω του Διαδικτύου. Ήταν λογικό και αναμενόμενο ο μεγάλος αυτός όγκος πληροφορίας να αποτελέσει κίνητρο για πλήθος ερευνητών να εξετάσουν τις δυνατότητες αξιοποίησής της και να αναπτύξουν εφαρμογές για αυτόν το σκοπό. Στα επόμενα παρουσιάζονται ενδεικτικά τρεις διαφορετικές εφαρμογές που κάνουν χρήση των εικόνων του Google Street View που σε καμία περίπτωση δεν καλύπτουν το ευρύτατο φάσμα αυτών που ήδη έχουν αναπτυχθεί και συνεχίζουν να αναπτύσσονται μέχρι σήμερα.

Η πρώτη εφαρμογή αφορά τον προσανατολισμό των εικόνων της Google με την υλοποίηση μεθόδου SfM και αναπτύχθηκε από τους *Klingner et al.* τα(2013). Ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη εργασία είναι το πλήθος των χρησιμοποιούμενων εικόνων καθώς στην πράξη επιχειρείται να υλοποιηθεί μία εφαρμογή SfM σε παγκόσμια κλίμακα. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία που προτείνουν χρησιμοποιεί ως αρχικές τιμές για τις θέσεις και τους προσανατολισμούς των εικόνων αυτές που διατίθενται από την Google και έχουν προκύψει από αισθητήρες GPS και INS που φέρουν τα οχήματα. Έτσι, με δεδομένο ότι η επίτευξη ικανοποιητικής ακρίβειας στον προσανατολισμό τόσο μεγάλου αριθμού εικόνων εξαρτάται σημαντικά από τη χρήση καλών αρχικών τιμών, προκύπτει εύλογα το ερώτημα τού ποια είναι η ακρίβεια της γεωαναφοράς των εικόνων που παρέχει η Google. Σε κάθε περίπτωση η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι απαλλαγμένη από το σύνηθες πρώτο στάδιο των αλγορίθμων SfM που αφορά την εκτίμηση αρχικών τιμών και άρα κι από τα σφάλματα που μπορούν να προκύψουν στο στάδιο αυτό.

Κατά τα άλλα, ένα μεγάλο μέρος της εργασίας αφορά το μαθηματικό μοντέλο της μηχανής κυλιόμενου κλείστρου (rolling shutter camera) που έχει χρησιμοποιηθεί για την λήψη των εικόνων και την ενσωμάτωση των παραμέτρων της εσωτερικής γεωμετρίας της μηχανής στην συνόρθωση με τη μέθοδο της δέσμης. Τελικά, πετυχαίνουν να προσανατολίσουν τις εικόνες με ακρίβεια λίγο καλύτερη του 1 m για τη θέση και λίγο χειρότερη της μίας μοίρας για τον προσανατολισμό, τιμές που είναι ικανοποιητικές με δεδομένο και το πλήθος των εικόνων.

Οι *Agarwal et al. (2015)* παρουσίασαν μία διαφορετική προσέγγιση αξιοποίησης των πανοραμάτων της Google όπου ζητούμενο δεν είναι ο προσανατολισμός των εικόνων αυτών αλλά η αξιοποίηση της διαθέσιμης πληροφορίας για τα σημεία λήψης των εικόνων με στόχο τη γεωαναφορά άλλων εικόνων. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι η ακρίβεια των σημείων λήψης που παρέχει η Google είναι ικανοποιητική, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τις εικόνες αυτές για να γεωαναφέρουν άλλες εικόνες (π.χ. εικόνες μεγαλύτερης ανάλυσης ή εικόνες σε περιοχές που δεν παρέχει δεδομένα η Google).

Πρακτικά και αυτή η εργασία είναι μία εφαρμογή SfM για τις νέες εικόνες, οι οποίες να σημειωθεί ότι δεν είναι πανοραμικές αλλά συμβατικές και για τις οποίες είναι και πάλι διαθέσιμες αρχικές τιμές από χαμηλής ακρίβειας αισθητήρες GPS και INS. Παρ' όλα αυτά οι τιμές αυτές δεν χρησιμοποιούνται για τον προσανατολισμό των εικόνων, ο οποίος υλοποιείται πλήρως αυτόματα με βάση τον σημειακό τελεστή SIFT για τον εντοπισμό ομόλογων, την επιπολική δέσμευση για την εκτίμηση αρχικών τιμών και, τέλος, συνόρθωση με τη μέθοδο της δέσμης για τη βελτιστοποίηση των τιμών των αγνώστων.

Η διαθέσιμη πληροφορία για τα σημεία λήψης από το GPS χρησιμοποιείται μόνο για να βρεθούν κατά προσέγγιση οι αντίστοιχες εικόνες της Google και να ζητηθούν από το API τα πανοράματα. Στην πράξη, χρησιμοποιούν τις διορθωμένες από ακτινική διαστροφή μεμονωμένες λήψεις της Google ώστε να προσανατολίσουν τις νέες εικόνες με βάση τα 3D σημεία του χώρου. Συγκεκριμένα, εντοπίζουν κοινά σημεία μεταξύ των νέων εικόνων και των πανοραμάτων της Google, και με βάση τις 3D συντεταγμένες που υπολογίζονται για τα σημεία αυτά θεωρώντας τις εικόνες της Google γεωαναφερμένες, επιλύουν τους μετασχηματισμούς στερεού σώματος για κάθε μία από τις νέες εικόνες.

Μία ακόμα εφαρμογή που αναφέρεται στα πανοράματα της Google παρουσιάστηκε από τους *Tsai & Chang* (*2013*) και αφορά την διερεύνηση της ακρίβειας υπολογισμού τρισδιάστατων συντεταγμένων σημείων από τα πανοράματα της Google με χρήση αποκλειστικά της διαθέσιμης γεωαναφοράς. Στην εργασία τους αναπτύσσουν ένα γραφικό περιβάλλον μέσω του οποίου δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να στοχεύει σημεία στις πανοραμικές εικόνες και να υπολογίζονται οι τρισδιάστατες συντεταγμένες τους μέσω απλής εμπροσθοτομίας. Επιπλέον, υλοποιούν και την κλασική επίλυση της φωτογραμμετρικής οπισθοτομίας δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να στοχεύσει σημεία γνωστών γεωδαιτικών συντεταγμένων ώστε να βελτιωθεί η ακρίβεια της θέσης και του προσανατολισμού του πανοράματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ποσοτικά στοιχεία που παραθέτουν και είναι ενδεικτικά τόσο για την ακρίβεια της θέσης και του προσανατολισμού που παρέχει η Google όσο και για τις δυνατότητες αξιοποίησής της. Συγκεκριμένα, αξιολογούν την ακρίβεια της απλής εμπροσθοτομίας χρησιμοποιώντας ως δεδομένα ελέγχου 17 σημεία που έχουν μετρηθεί με GPS με τη μέθοδο του στατικού εντοπισμού θέσης. Το τελικό RMS στα X υπολογίζεται ίσο με ±2.358 m, στα Y ±2.981 m και στα Z ±6.724 m. Ως δεύτερο έλεγχο χρησιμοποιούν και σημεία στην όψη ενός κτηρίου τα οποία έχουν μετρηθεί με Total Station και καταλήγουν σε παρόμοια σφάλματα. Συγκεκριμένα τα εναπομένοντα σφάλματα για τα X υπολογίζονται ως ±0.526 m, για τα Y ±1.207 m και για τα Z ±5.817 m. Επισημαίνουν ότι η ακρίβεια δεν βελτιώνεται αν αντί για δύο εικόνες χρησιμοποιηθούν περισσότερα πανοράματα και επιλυθεί πολλαπλή εμπροσθοτομία. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι η ακρίβεια της γεωαναφοράς των εικόνων είναι τέτοια που επιτρέπει την τρισδιάστατη ανακατασκευή σημείων με σφάλματα της τάξεως των λίγων m. Το παραπάνω επιβεβαιώνεται και μέσω της επίλυσης της φωτογραμμετρικής οπισθοτομίας με χρήση 7 σημείων με γνωστές συντεταγμένες όπου προκύπτουν αποκλίσεις μεταξύ των υπολογιζόμενων και των διαθέσιμων συντεταγμένων για τα σημεία λήψης ίσες με: 0.142 m για το X_0, 1.558 m για το Y_0 και 5.733 m για το Z_0. Ως πιθανές αιτίες για τις τιμές των σφαλμάτων αναφέρουν κατ' αρχάς την ακρίβεια της γεωαναφοράς από την Google, τις διαστροφές των εικόνων καθώς και την μικρή γωνία τομής των ομόλογων ακτίνων σε ορισμένες περιοχές των εικόνων.

Οι παραπάνω εργασίες σε καμία περίπτωση δεν καλύπτουν πλήρως το φάσμα των εφαρμογών που έχουν αναπτυχθεί για την αξιοποίηση των διαθέσιμων πανοραμικών δεδομένων της Google, είναι όμως ενδεικτικές για τις δυνατότητες και τις προοπτικές υπάρχουν. Μολονότι η διαθέσιμη αρχική πληροφορία για τη γεωαναφορά των εικόνων είναι μειωμένης ακρίβειας και συγκεκριμένα της τάξεως των λίγων m, οι εν λόγω πανοραμικές εικόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν – και χρησιμοποιούνται – σε πλήθος εφαρμογών. Αναλυτικότερα, σε εφαρμογές με απαιτήσεις ακριβείας εκ των πραγμάτων χαμηλές, όπως η πλοήγηση σε ορισμένες περιπτώσεις ή ο εντοπισμός αλλαγών σε αστικό περιβάλλον, τα πανοράματα της Google αποτελούν μία καλή λύση. Από την άλλη πλευρά, σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται υψηλότερες ακρίβειες, οι διαθέσιμες τιμές για τη θέση και τον προσανατολισμό των εικόνων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές σε μία διαδικασία συνόρθωσης με στόχο την βελτιστοποίηση του προσανατολισμού των εικόνων και τον προσδιορισμό τρισδιάστατων συντεταγμένων με υψηλότερη ακρίβεια. Σε κάθε περίπτωση, ο όγκος των δεδομένων της Google και η παγκόσμια κάλυψη που παρέχουν αποτελούν σίγουρα πολύ ισχυρά κίνητρα για την ενασχόληση με τα συγκεκριμένα δεδομένα και την αξιοποίησή τους στον μέγιστο δυνατό βαθμό.

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο των σφαιρικών εικόνων, η παρούσα εργασία έκανε στα προηγούμενα μία προσπάθεια παρουσίασης των βασικών στοιχείων της γεωμετρίας των σφαιρικών πανοραμάτων και των εφαρμογών στις οποίες μπορούν αυτά να χρησιμοποιηθούν, εξετάζοντας παράλληλα ποια είναι εκείνα τα πλεονεκτήματα που έχει το σφαιρικό μοντέλο σε σχέση με την κλασική κεντρική προβολή σε επίπεδο, τα οποία και οδηγούν στην ολοένα αυξανόμενη χρήση των πανοραμικών δεδομένων. Επαναλαμβάνεται ότι ειδοποιός διαφορά μεταξύ των συμβατικών και των πανοραμικών εικόνων είναι προφανώς το μεγαλύτερο οπτικό πεδίο των δεύτερων, που στην περίπτωση των σφαιρικών πανοραμάτων ισοδυναμεί με κάλυψη του χώρου προς όλες τις διευθύνσεις. Ακριβώς αυτό το αυξημένο γωνιακό άνοιγμα των πανοραμικών εικόνων είναι και ο λόγος που η χρήση τους αυξάνει ολοένα και περισσότερο καθώς συνδέεται άμεσα με την ακρίβεια προσδιορισμού των διαδοχικών θέσεων κινούμενης μηχανής. Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία αναφέρεται ότι το διευρυμένο οπτικό πεδίο των πανοραμικών οδηγεί κατ' αρχάς στην καταγραφή μεγαλύτερου μέρους του περιβάλλοντα χώρου με λιγότερες εικόνες αλλά και σε μεγαλύτερες επικαλύψεις μεταξύ διαδοχικών εικόνων για δεδομένη βάση λήψης. Έτσι, ένα πρώτο επιχείρημα υπέρ της χρήσης των πανοραμικών εικόνων είναι ότι σε αυτές είναι δυνατόν να εντοπιστούν περισσότερα κοινά σημεία μεταξύ διαδοχικών λήψεων λόγω της αυξημένης επικάλυψης και άρα περισσότερες παρατηρήσεις για τις συνήθεις φωτογραμμετρικές διαδικασίες. Ταυτόχρονα, είναι προφανές ότι η ανακατασκευή μεγαλύτερου τμήματος του χώρου είναι δυνατή με λιγότερες εικόνες στην περίπτωση των πανοραμικών, γεγονός που μειώνει τον αριθμό των αγνώστων στο στάδιο του προσανατολισμού αλλά και τους απαιτούμενους χρόνους επεξεργασίας. Όμως το βασικό πλεονέκτημα των πανοραμικών εικόνων είναι ότι η αποκατάσταση του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να γίνει με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τις συμβατικές εικόνες (*Kang & Szeliski, 1997*) ακριβώς λόγω του ότι μία σφαιρική μηχανή καταγράφει σημεία προς όλες τις διευθύνσεις επιτρέποντας έτσι μία «φυσική εξισορρόπηση» των σφαλμάτων (*Pagani et al., 2011*).

3

Συναρτήσεις Σφάλματος

Μέχρι το σημείο αυτό έχει γίνει αναφορά σε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού. Ο πρώτος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι μέσω της συνόρθωσης δέσμης, μεθόδου που επιβάλλεται να εφαρμόζεται στο τελικό στάδιο όταν οι απαιτήσεις ακρίβειας είναι υψηλές. Όπως έχει όμως αναφερθεί, η μέθοδος της δέσμης απαιτεί αρχικές τιμές για τους αγνώστους και επιπλέον εμπλέκει στην διαδικασία τις συντεταγμένες σημείων του χώρου. Η δεύτερη προσέγγιση είναι μέσω της επιβολής της επιπολικής δέσμευσης με γραμμική ή μη γραμμική επίλυση της εξίσωσης συνεπιπεδότητας. Στο κεφάλαιο 1 περιγράφηκε αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθείται στην μία και στην άλλη περίπτωση, χωρίς όμως να γίνει αναφορά στην γεωμετρική ερμηνεία του σφάλματος που ελαχιστοποιείται κάθε φορά.

Από τη μορφή της συνθήκης συνεπιπεδότητας, είτε αυτή εκφραστεί μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (γραμμική λύση) είτε μέσω του διανύσματος της βάσης και του πίνακα στροφής (μη γραμμική λύση), γίνεται αντιληπτό ότι η ποσότητα που ελαχιστοποιείται είναι το σφάλμα κλεισίματος της εξίσωσης το οποίο δεν έχει άμεσα φυσική ερμηνεία. Το γεγονός αυτό αφενός δυσχεραίνει την ερμηνεία του αποτελέσματος και της ποιότητας της λύσης, αφετέρου δε μπορεί να δημιουργήσει αριθμητικά προβλήματα. Ο *Zhang (1998),* μέσα από μία επισκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού μη βαθμονομημένων μηχανών, κάνει αναφορά σε αυτό ακριβώς το ζήτημα αποδεικνύοντας μαθηματικά ότι η γραμμική μέθοδος εκτίμησης του επιπολικού πίνακα ελαχιστοποιεί μία μη φυσική ποσότητα. Με τον όρο σφάλμα με φυσική ερμηνεία νοείται μία ποσότητα που θα μπορούσε να μετρηθεί στο επίπεδο της εικόνας (στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων) αφού σε αυτό αναφέρονται οι διαθέσιμες παρατηρήσεις (συντεταγμένες των ομόλογων σημείων). Μία τέτοια ποσότητα θα ήταν πχ. η απόσταση ενός εικονοσημείου από την αντίστοιχη επιπολική ευθεία. Όμως αποδεικνύεται μέσω της γραμμικής λύσης ότι το σφάλμα που ελαχιστοποιείται αντιστοιχεί στην ποσότητα αυτή πολλαπλασιασμένη με έναν συντελεστή που δεν ερμηνεύεται γεωμετρικά. Η ύπαρξη αυτού του συντελεστή είναι η αιτία για την τάση (bias) που έχει παρατηρηθεί στην γραμμική λύση να υπολογίζει τις θέσεις των πόλων πιο κοντά στο κέντρο των εικόνων από όσο πραγματικά είναι. Από την άλλη πλευρά, το πλεονέκτημα της γραμμικής λύσης που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση αυτής της αλγεβρικής ποσότητας (algebraic error) είναι ότι δεν υπάρχει ο κίνδυνος σύγκλισης σε κάποιο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος (*Stewenius et al., 2006*), και άρα οι μέθοδοι αυτές είναι αποτελεσματικές ειδικά στο στάδιο του εντοπισμού και απόρριψης χονδροειδών σφαλμάτων από τις παρατηρήσεις.

Παραπάνω αναφέρθηκε ένα ενδεικτικό παράδειγμα των προβλημάτων που μπορούν να δημιουργηθούν ανάλογα με το ποια ποσότητα ελαχιστοποιείται κατά την επίλυση. Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, αρκετοί έχουν ασχοληθεί με αυτό το ζήτημα, δηλαδή με το πώς ορίζεται η εκάστοτε συνάρτηση σφάλματος. Στην περίπτωση του σχετικού προσανατολισμού, με τον όρο συνάρτηση σφάλματος νοείται μία συνάρτηση η οποία μετράει με κάποιο τρόπο την απόκλιση δύο ομόλογων σημείων από την επιπολική δέσμευση (*Fathy et al., 2017*). Μολονότι συχνά η συνθήκη που επιβάλλεται είναι η ίδια, αποδεικνύεται ότι η μαθηματική διατύπωση που χρησιμοποιείται παίζει ρόλο τόσο στην ακρίβεια όσο και στην αποτελεσματικότητα της λύσης. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε αριθμητικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό του ενός ή του άλλου σφάλματος ή και σε θέματα γεωμετρίας που αφορούν τις παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού και την κατανομή των σημείων. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται ότι η επιλογή της συνάρτηση κόστους είναι ζωτικής σημασίας για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού (*Fathy et al., 2017*).

Στα προηγηθέντα βασίζεται και ένα μεγάλο, αν όχι το μεγαλύτερο, μέρος της παρούσας εργασίας που αφορά την μελέτη διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού. Συγκεκριμένα, υλοποιήθηκαν επτά διαφορετικές συναρτήσεις και μελετήθηκε η συμπεριφορά τους υπό διαφορετικές συνθήκες. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου περιγράφονται οι συναρτήσεις αυτές, αφού πρώτα γίνει αναφορά στην γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης συνεπιπεδότητας όπως αυτή διατυπώνεται στην κλασική της μορφή.

Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης συνεπιπεδότητας

Για να αντιληφθεί κανείς την έννοια και την σημασία μίας συνάρτηση σφάλματος και τον ισχυρισμό ότι η κλασική προσέγγιση ελαχιστοποιεί απλώς ένα σφάλμα κλεισίματος, θα πρέπει πρώτα να κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης συνεπιπεδότητας:

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{m_1} \times \mathbf{m_2}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

όπου $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ είναι ένα ζεύγος ομόλογων σημείων και $\mathbf{t}$ το διάνυσμα της βάσης του στερεοζεύγους.

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την μαθηματική διατύπωση της συνθήκης συνεπιπεδότητας στην κλασική της μορφή, δηλαδή μέσω του μικτού γινομένου των ομόλογων οπτικών ακτίνων με το διάνυσμα της βάσης. Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ εκφράζει διάνυσμα $\mathbf{n}$ κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν οι οπτικές ακτίνες των ομόλογων σημείων. Έτσι, προκειμένου να ισχύει η συνθήκη συνεπιπεδότητα των τριών διανυσμάτων, το διάνυσμα $\mathbf{t}$ της βάσης οφείλει να είναι κάθετο στο νέο αυτό διάνυσμα $\mathbf{n}$, ώστε να είναι συνεπίπεδο με τα δύο ομόλογα διανύσματα. Η καθετότητα δύο διανυσμάτων ισοδυναμεί με τον μηδενισμό του εσωτερικού τους γινομένου, αφού το συνημίτονο της ορθής γωνίας ισούται με μηδέν. Συνεπώς, το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{t}$ της βάσης με το διάνυσμα κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ θα πρέπει να είναι μηδενικό. Υπό αυτήν την έννοια, για μοναδιαία διανύσματα, το εναπομένον σφάλμα της παραπάνω εξίσωσης (ή αλλιώς το προαναφερθέν σφάλμα κλεισίματος της εξίσωσης) αντιστοιχεί στο συνημίτονο της γωνίας των $\mathbf{t}$ και $\mathbf{n}$.

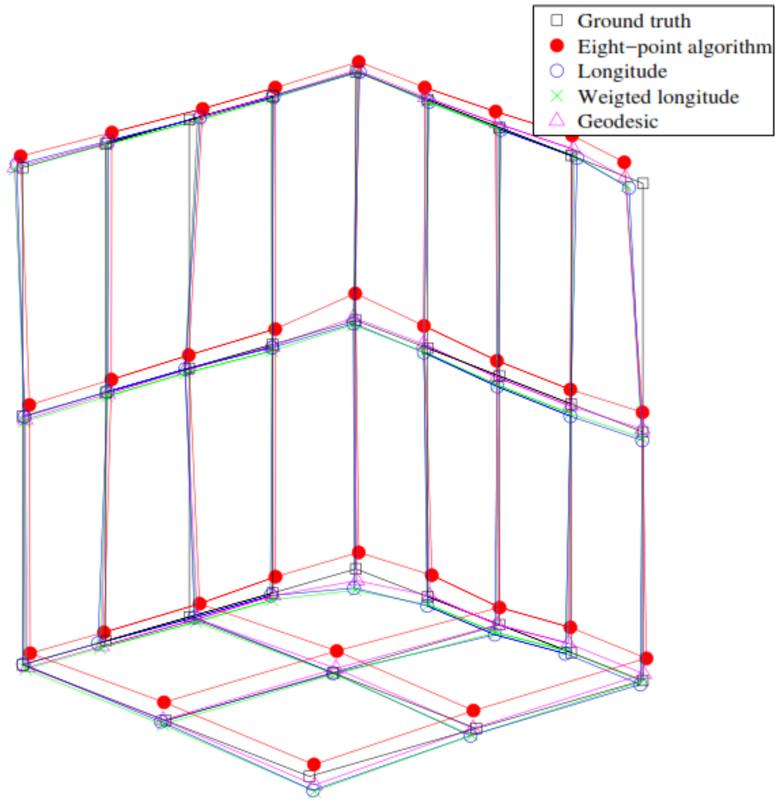
Εναλλακτικά, η συνθήκη συνεπιπεδότητας ερμηνεύεται γεωμετρικά και μέσω της έννοιας του μικτού γινομένου. Ως γνωστόν, το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων εκφράζει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία αυτά διανύσματα. Άρα, το σφάλμα κλεισίματος της συνθήκης συνεπιπεδότητας ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τις ομόλογες οπτικές ακτίνες και την βάση, και άρα η επίλυση της 3.1 ισοδυναμεί με τον μηδενισμό του όγκου αυτού του παραλληλεπιπέδου επιβάλλοντας έτσι τα διανύσματα να είναι συνεπίπεδα.

Παραλλαγές της κλασικής εξίσωσης

Με βάση αυτή την γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης συνεπιπεδότητας προέκυψε ότι η ποσότητα που ελαχιστοποιείται κατά την επίλυση είναι το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων που ισοδυναμεί με μία ευκλείδεια απόσταση στο επίπεδο. Πέρα από την προαναφερθείσα ευαισθησία της γραμμικής λύσης στον θόρυβο των παρατηρήσεων λόγω της ελαχιστοποίησης ενός αλγεβρικού σφάλματος (*Fujiki, 2008*), θα πρέπει να ληφθεί υπόψη μία επιπλέον παράμετρος, εκείνη της χρήσης σφαιρικών εικόνων αντί συμβατικών. Ο *Fujiki (2008)*, θίγοντας ακριβώς αυτό το ζήτημα, υποστηρίζει ότι όπως για τις συμβατικές μηχανές είναι κατάλληλο μέτρο σφάλματος μία απόσταση στο επίπεδο, έτσι και για τις σφαιρικές είναι φυσικό η χρησιμοποιούμενη ποσότητα να μετρείται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με το επιχείρημα ότι ένα γωνιακό σφάλμα είναι προτιμητέο (αντί μίας απόστασης) ειδικά στις σφαιρικές εικόνες, γιατί μπορεί να μετρείται απευθείας στην επιφάνεια της σφαίρας και άρα να είναι ανεξάρτητο του μοντέλου προβολής της εκάστοτε μηχανής (*Lhuillier, 2006, Pagani & Stricker, 2011*).

Βάσει αυτού, ο *Fujiki (2008)* προτείνει τρία τέτοια γωνιακά μεγέθη που μετρούνται πάνω στη σφαίρα και συγκεκριμένα την απόσταση κατά μήκος μίας γεωδαισιακής γραμμής, τη διαφορά στα γεωγραφικά μήκη λ και το μήκος του τόξου μεταξύ δύο διαφορετικών παραλλήλων. Ο υπολογισμός της πρώτης ποσότητας μπορεί να γίνει απευθείας στις αρχικές σφαιρικές εικόνες, ενώ για τον υπολογισμό των δύο τελευταίων θα πρέπει να έχει προηγηθεί επιπολική επανασύσταση των εικόνων. Στην συγκεκριμένη εργασία, η αξιολόγηση των προτεινόμενων σφαλμάτων γίνεται μέσω πειραμάτων με προσομοιωμένα δεδομένα ενώ μεταβάλλονται το επίπεδο του θορύβου αλλά και το πλήθος των παρατηρήσεων. Τελικά καταλήγει ότι η χρήση ενός γωνιακού σφάλματος οδηγεί σε αυξημένη ακρίβεια και σταθερότητα στην λύση σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της γραμμικής επίλυσης. Στην Εικόνα 17 παρουσιάζεται η σχετική ακρίβεια μεταξύ των επιμέρους σφαλμάτων μέσω της ακρίβειας της εμπροσθοτομίας που πετυχαίνει κάθε επίλυση. Αναφορικά με την συγκριτική αξιολόγηση των τριών γωνιακών σφαλμάτων δεν προκύπτει σαφής υπεροχή του ενός αντί άλλων καθώς τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται ανάλογα με το πείραμα.

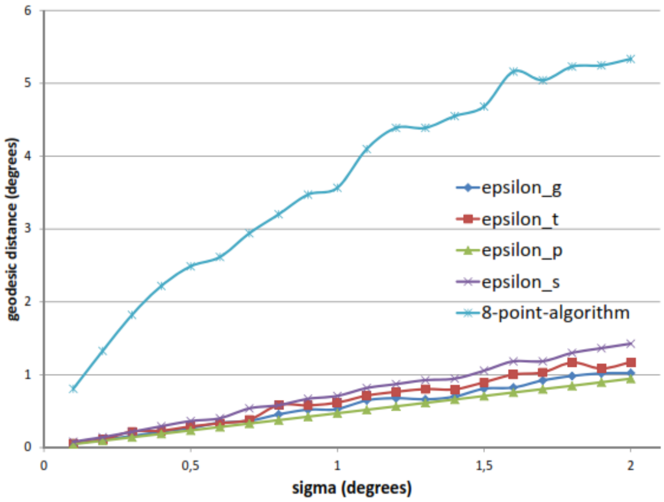
Οι *Pagani & Stricker (2011)* αναφέρουν και αυτοί ότι η χρήση μίας γεωμετρικής ποσότητας μετρούμενης απευθείας στη σφαίρα συμβάλλει στην σταθεροποίηση της επίλυσης και στην αύξηση της ακρίβειας, ωστόσο αναφερόμενοι στην προηγούμενη εργασία επισημαίνουν ότι η επιπολική επανασύσταση των εικόνων που προτείνει ο *Fujiki (2008)* αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας.



Εικόνα 17: Η τρισδιάστατη ανακατασκευή ενός κύβου που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση κάθε μίας από τις προτεινόμενες γεωμετρικές ποσότητες σε σύγκριση με την πραγματική γεωμετρία του αντικειμένου αλλά και την ανακατασκευή που προκύπτει από την συνήθη επίλυση του Δεσμευμένου Επιπολικού Πίνακα (Fujiki, 2008).

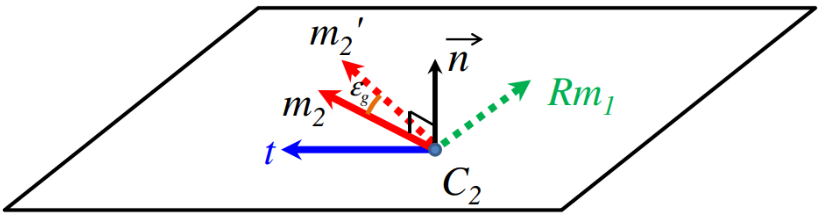
Έτσι, οι ίδιοι προτείνουν τρεις εναλλακτικές εκφράσεις του σφάλματος της συνεπιπεδότητας, οι οποίες υποστηρίζουν ότι είναι καταλληλότερες για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού ζεύγους σφαιρικών εικόνων. Τα προτεινόμενα σφάλματα τα εφαρμόζουν στον προσανατολισμό 35 σφαιρικών πανοραμάτων και καταλήγουν και αυτοί ότι η ποσότητα που θα ελαχιστοποιηθεί επηρεάζει σημαντικά το αποτέλεσμα, επίδραση η οποία ενισχύεται όσο αυξάνει ο θόρυβος των παρατηρήσεων (*Εικόνα 18*). Οι συγγραφείς εξετάζουν την αποτελεσματικότητα κάθε συνάρτησης σφάλματος μόνο ως προς το επίπεδο θορύβου των παρατηρήσεων και καταλήγουν ότι το καλύτερο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης ενός εφαπτομενικού σφάλματος.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στο πλαίσιο της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας υλοποιήθηκαν συνολικά επτά διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος (συμπεριλαμβανομένης και της κλασικής συνθήκης συνεπιπεδότητας), τρεις εκ των οποίων είναι οι προτεινόμενες από τους Pagani & Stricker (*2011*). Έτσι, από τα πειράματα που έγιναν και παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο μπορεί να εξακριβωθεί το κατά πόσο τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με εκείνα των Pagani & Stricker (όσον αφορά τα πειράματα για διαφορετικά επίπεδα θορύβου), αλλά κυρίως να διερευνηθεί η συμπεριφορά κάθε συνάρτησης σφάλματος υπό την επίδραση διαφορετικών παραμέτρων που αφορούν την γεωμετρία. Ακολούθως, παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση των τριών προαναφερθέντων γωνιακών σφαλμάτων καθώς και των επιπλέον τριών που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας.



Εικόνα 18: Αξιολόγηση των ποσοτήτων που ελαχιστοποιούνται στην συνόρθωση υπό την επίδραση διαφορετικών επιπέδων θορύβου για τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (Pagani & Stricker, 2011).

Το πρώτο σφάλμα, που προτείνεται από τους Pagani & Stricker (2011) και χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία αναφέρεται ως γεωδαισιακό σφάλμα και συμβολίζεται με ε_g.



Εικόνα 19: Η γεωμετρική ερμηνεία του σφάλματος κλεισίματος της συνθήκης συνεπιπεδότητας (Pagani & Stricker, 2011).

Συγκεκριμένα, αντί της ελαχιστοποίησης του συνημίτονου της γωνίας δύο διανυσμάτων (ή ισοδύναμα του ημιτόνου του γωνιακού σφάλματος), προτείνουν την χρήση του γωνιακού σφάλματος ε_g (Εικόνα 19) υπολογίζοντας το αντίστροφο του ημιτόνου. Έτσι, στην περίπτωση της σφαίρας η γωνία αυτή μεταφράζεται στο μήκος του τόξου επί της γεωδαισιακής γραμμής και αποδεικνύεται πλεονεκτικότερη καθώς ο υπολογισμός αυτός δεν εμπλέκει τις επιπολικές γραμμές και άρα είναι ανεξάρτητος του μοντέλου της μηχανής. Με βάση τα παραπάνω και αν θεωρηθεί ότι όλα τα διανύσματα είναι μοναδιαία, το γωνιακό σφάλμα υπολογίζεται ως:.

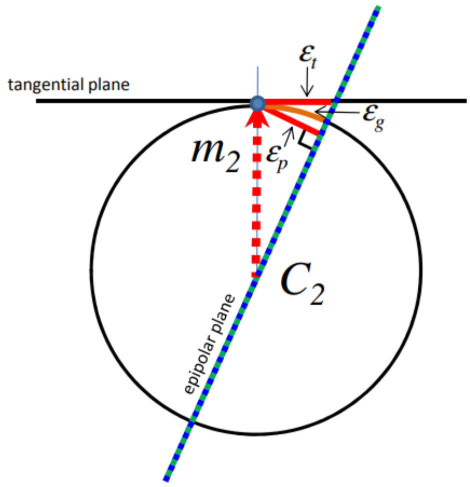
$$\varepsilon_g = \sin^{-1}\left(\mathbf{m}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{E}\mathbf{m}_2\right) \tag{3.2}$$

Τα άλλα δύο σφάλματα που προτείνονται υπολογίζονται από τις εξισώσεις 3.3 και 3.4 και αντιστοιχούν σε ένα κάθετο (ε_p) και ένα εφαπτομενικό σφάλμα (ε_t). Το κάθετο σφάλμα αποτελεί μία προσέγγιση του γεωδαισιακού σφάλματος που θεωρείται ικανοποιητική όταν η γωνία ασυμβατότητας των διανυσμάτων είναι μικρή. Συγκεκριμένα, με βάση την Εικόνα 20 το ε_p αντιστοιχεί στην κάθετη απόσταση μεταξύ του επιπολικού επιπέδου (που ορίζεται από τη μία οπτική ακτίνα και την βάση) και του ομόλογου σημείου:

$$\varepsilon_p = \frac{|\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{m}_2|}{\|\mathbf{m}_1\|\|\mathbf{E}\mathbf{m}_2\|} \tag{3.3}$$

Τέλος, αν θεωρηθεί ένα επίπεδο εφαπτόμενο στην επιφάνεια της σφαίρας στο ένα ομόλογο σημείο, τότε το εφαπτομενικό σφάλμα προκύπτει ως η προβολή του γωνιακού σφάλματος στο επίπεδο αυτό και υπολογίζεται ως:

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{1-e_p^2}} \tag{3.4}$$



Εικόνα 20: Σχηματική αναπαράσταση των προτεινόμενων γωνιακών σφαλμάτων (Pagani & Stricker, 2011).

Η επόμενη συνάρτηση σφάλματος που υλοποιήθηκε και χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο της εργασίας αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως «ο χρυσός κανόνας» (Gold Standard Method) και συνιστάται να χρησιμοποιείται, τουλάχιστον στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων, όταν ο θόρυβος ακολουθεί την κανονική κατανομή (*Hartley & Zisserman, 2000*). Η συγκεκριμένη συνάρτηση σφάλματος βασίζεται στον υπολογισμό του σφάλματος επαναπροβολής στο επίπεδο της εικόνας της εκτιμώμενης θέσης του σημείου στο χώρο. Αναλυτικότερα, έχοντας μία αρχική εκτίμηση των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να προσδιοριστεί η θέση καθενός σημείου στο χώρο, και στην συνέχεια το σημείο αυτό να προβληθεί πάλι πίσω στο επίπεδο κάθε μίας εικόνας. Έτσι, για κάθε εικόνα μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ προβαλλόμενης θέσης του σημείου και αρχικής, με την ποσότητα που ελαχιστοποιείται να ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων για κάθε εικόνα. Παρά το γεγονός ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση σφάλματος αναφέρεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία ως η βέλτιστη επιλογή για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού, θα πρέπει να σημειωθεί ότι έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Η απαίτηση που υπάρχει για τον υπολογισμό της τρισδιάστατης θέσης των χρησιμοποιούμενων ομόλογων σημείων επιβάλλει την επίλυση της εμπροσθοτομίας ως ενδιάμεσο στάδιο, με συνέπεια να αυξάνει το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας και κυριότερα να επηρεάζεται η τελική ακρίβεια του προσανατολισμού από την ακρίβεια του τριγωνισμού. Ουσιαστικά λοιπόν πρόκειται για το ίδιο μειονέκτημα που αναφέρθηκε και στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της δέσμης για την επίλυση του σχετικού, όπου τυχόν σημεία πολύ μακριά από τις μηχανές αναμένεται να επιδεινώσουν σημαντικά την τελική ακρίβεια ή και να καταστήσουν αδύνατη την λύση. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου οι χρησιμοποιούμενες εικόνες είναι σφαιρικές (όπως συμβαίνει στην συγκεκριμένη εργασία), το gold standard error δεν είναι το πλέον κατάλληλο σφάλμα καθώς οι αποστάσεις που υπολογίζονται αναφέρονται στο επίπεδο και όχι στην επιφάνεια της σφαίρας (*Fujiki, 2008*).

Το επόμενο σφάλμα που υλοποιήθηκε και χρησιμοποιήθηκε είναι επίσης ευρέως διαδεδομένο και γνωστό με την ονομασία Sampson error. Το σφάλμα αυτό αποτελεί ουσιαστικά μία προσέγγιση του προηγούμενου και βασίζεται στον υπολογισμό των παραγώγων πρώτης τάξης της προηγούμενης συνάρτησης (*Hartley & Zisserman, 2000*):

$$\varepsilon_{sampson} = \frac{\left(\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{m}_2\right)^2}{[\mathbf{E}\mathbf{m}_2]_1^2+[\mathbf{E}\mathbf{m}_2]_2^2+[\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_1]_1^2+[\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_1]_2^2} \tag{3.5}$$

όπου$[.]_n$ αντιστοιχεί στο n-οστό στοιχείο ενός διανύσματος.

Το επόμενο και τελευταίο σφάλμα που χρησιμοποιήθηκε δεν αναφέρεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία αλλά υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας και αποτελεί μία ακόμα παραλλαγή για την έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας. Συγκεκριμένα, αντί του μικτού γινομένου η συνεπιπεδότητα τριών διανυσμάτων μπορεί να εκφραστεί μέσω τριών εξωτερικών γινομένων όπως φαίνεται στην εξίσωση 3.6. Αναλυτικότερα, το εξωτερικό γινόμενο της μίας ομόλογης ακτίνας με το διάνυσμα της βάσης αντιστοιχεί στο κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{n_1}$ του επιπέδου που ορίζουν αυτές. Αντίστοιχα το εξωτερικό γινόμενο της άλλης ομόλογης ακτίνας και πάλι με την βάση αντιστοιχεί στο κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{n_2}$ του επιπέδου που ορίζουν αυτές. Για να είναι και τα τρία διανύσματα συνεπίπεδα θα πρέπει τα δύο κάθετα διανύσματα να είναι παράλληλα και άρα το εξωτερικό τους γινόμενο να είναι μηδενικό:

$$(\mathbf{m_1} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{m_2} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

Ουσιαστικά ο μηδενισμός του εξωτερικού γινομένου των δύο κάθετων διανυσμάτων ισοδυναμεί με τον μηδενισμό της μεταξύ τους γωνίας οπότε το ημίτονό της ισούται με μηδέν. Έτσι, όπως και στην κλασική συνεπιπεδότητα, το σφάλμα που ελαχιστοποιείται ερμηνεύεται γεωμετρικά ως μία γωνία. Η διαφορά εδώ είναι ότι η γωνία ορίζεται από τα κάθετα διανύσματα δύο επιπολικών επιπέδων και όχι απευθείας από τα διανύσματα των ομόλογων σημείων και της βάσης, και άρα αναμένεται να μην επηρεάζεται από την διεύθυνση των σημείων που χρησιμοποιούνται.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα, και άρα η χρήση του ως συνάρτησης σφάλματος απαιτεί την έκφρασή του μέσω ενός αριθμού. Ο πιο απλός τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί το μέτρο αυτού του διανύσματος ως σφάλμα κλεισίματος της εξίσωσης, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\varepsilon_{reform} = \|(\mathbf{m_1} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{m_2} \times \mathbf{B})\| \tag{3.7}$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιήθηκε στο σύνολο των πειραμάτων της παρούσας διπλωματικής εργασίας για την έκφραση του σφάλματος που περιγράφηκε παραπάνω. Εξαίρεση αποτελεί ένα μόνο πείραμα όπου αντί της εξίσωσης 3.6 χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη:

$$(\mathbf{m_1} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{m_2} \times \mathbf{B}) - \mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

Στην τελευταία εξίσωση αντί του εξωτερικού γινομένου των δύο κάθετων διανυσμάτων χρησιμοποιήθηκε το εσωτερικό τους γινόμενο, το οποίο θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα αν τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους και μοναδιαία. Έτσι, η συνάρτηση σφάλματος μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\varepsilon_{reform} = \frac{\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}}{\|\boldsymbol{n_1}\|\|\boldsymbol{n_2}\|} - 1 \tag{3.9}$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η παρουσίαση των επτά διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Στόχος των πειραμάτων που έγιναν και παρουσιάζονται στα επόμενα ήταν να διερευνηθεί η ακρίβεια κάθε συνάρτησης αλλά και η αποτελεσματικότητά της. Η ανάλυση της συμπεριφοράς κάθε συνάρτησης σφάλματος αφορά την εκτίμηση του πόσο δύσκολο είναι να αποφευχθεί η σύγκλιση σε ένα τοπικό ελάχιστο. Όλα τα παραπάνω αξιολογήθηκαν όχι μόνο ως προς την επίδραση του θορύβου των παρατηρήσεων (όπως παρουσιάζεται στην υπάρχουσα σχετική βιβλιογραφία) αλλά κυρίως ως προς την επίδραση που έχουν παράμετροι που αφορούν την γεωμετρία του προβλήματος. Επισημαίνεται ότι όλα τα πειράματα αξιολογήθηκαν και υπό το πρίσμα της σφαιρικής γεωμετρίας, ώστε να διαπιστωθούν τυχόν διαφορές στη συμπεριφορά των συναρτήσεων σφάλματος μεταξύ των συμβατικών και των σφαιρικών εικόνων.

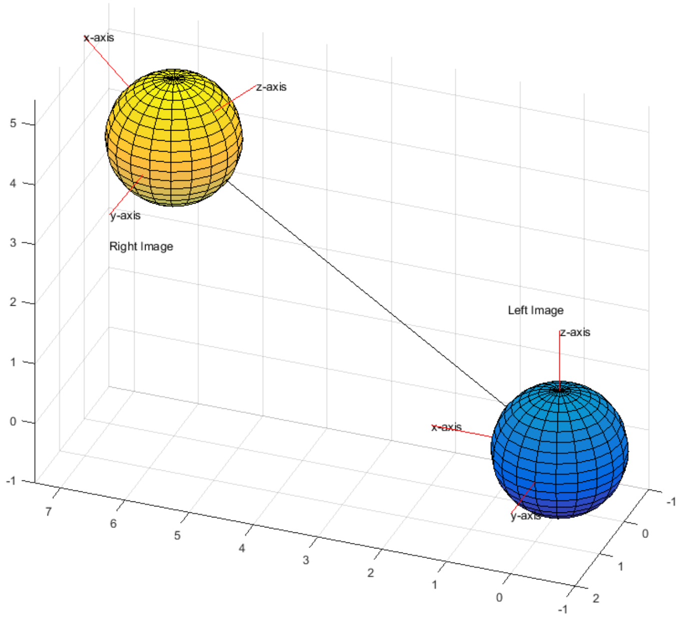
4

Παρουσίαση του αλγορίθμου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ολοκληρώθηκε η περιγραφή των συναρτήσεων σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού ζεύγους σφαιρικών εικόνων. Η υλοποίηση των συναρτήσεων αυτών αλλά και όλων των απαιτούμενων σταδίων της διαδικασίας έγινε στο περιβάλλον του MATLAB. Το πρώτο στάδιο αφορούσε την δημιουργία των τεχνητών δεδομένων, δηλαδή την δημιουργία σημείων του χώρου και την προβολή τους στην επιφάνεια κάθε μίας από τις δύο σφαιρικές εικόνες που είχαν οριστεί. Στην συνέχεια έγινε προσθήκη θορύβου στα σημεία κάθε εικόνας και ακολούθησε η γραμμική επίλυση του πίνακα **E**. Από τα στοιχεία του πίνακα **E** εξήχθησαν οι τέσσερις συνδυασμοί πίνακα στροφής και διανύσματος μετάθεσης, και ύστερα από κατάλληλη διερεύνηση (προσαρμοσμένη στις σφαιρικές εικόνες) προέκυψαν οι ζητούμενες αρχικές τιμές για τους αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού. Ακολούθησε η μη γραμμική επίλυση του σχετικού προσανατολισμού για κάθε μία από τις επτά διαφορετικές εξισώσεις που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, ορίστηκαν και υπολογίστηκαν μέτρα ακρίβειας για την αξιολόγηση κάθε επίλυσης, και δημιουργήθηκαν διαγράμματα για την καλύτερη παρουσίαση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Τα βήματα αυτά περιγράφονται αναλυτικά στην συνέχεια του κεφαλαίου, ενώ δίνεται όπου κρίθηκε σκόπιμο το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο.

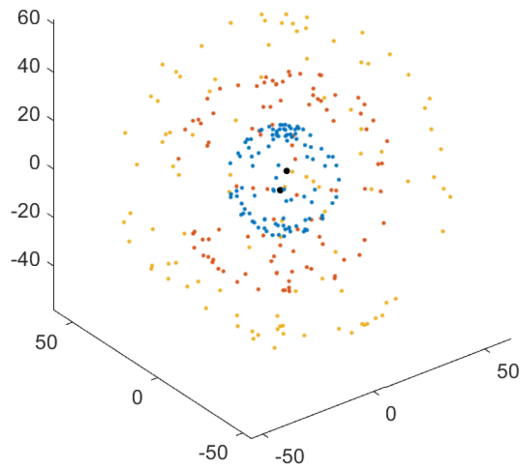
Δημιουργία των δεδομένων

Το πρώτο βήμα για την υλοποίηση της διαδικασίας είναι η δημιουργία των δεδομένων που συνίσταται στην δημιουργία των δύο σφαιρικών εικόνων και των σημείων του χώρου. Για τον ορισμό των δύο σφαιρικών εικόνων θωρήθηκαν δύο μοναδιαίες σφαίρες, η πρώτη (στα επόμενα θα αναφέρεται ως αριστερή εικόνα) με κέντρο το (0,0,0) και μοναδιαίο πίνακα στροφής, και η δεύτερη (στα επόμενα θα αναφέρεται ως δεξιά εικόνα) με κέντρο το σημείο C2 και πίνακα στροφής **R**. Αυτός ο πίνακας **R** εκφράζει την στροφή του συστήματος της δεξιάς εικόνας ως προς το σύστημα του χώρου, και άρα ο πίνακας που θα υπολογιστεί από την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού (δηλαδή ο πίνακας που εκφράζει την στροφή του συστήματος του χώρου στο σύστημα της δεξιάς εικόνας) θα είναι ο ανάστροφος του **R**. Μια δεύτερη παρατήρηση αφορά την επιλογή της μοναδιαίας σφαίρας που προαναφέρθηκε. Η επιλογή αυτή αποτελεί πάγια τακτική στην βιβλιογραφία καθώς σε αρκετές περιπτώσεις απλοποιεί τις μαθηματικές σχέσεις χωρίς όμως να περιορίζει την γενικότητα (θα μπορούσε αντί της μοναδιαίας σφαίρας να χρησιμοποιηθεί σφαίρα με οποιαδήποτε τιμή ακτίνας χωρίς αυτό να αλλάζει κάτι στην ουσία του προβλήματος). Τέλος, αναφορικά με το σύστημα αναφοράς της αριστερής εικόνας (που ορίζει το σύστημα του χώρου) θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό ορίστηκε με κατακόρυφο άξονα Ζ, και συνεπώς δεν ακολουθήθηκε η συνήθης πρακτική που συναντάται στην φωτογραμμετρία στις περιπτώσεις των συμβατικών εικόνων (Εικόνα 21). Μολονότι αυτό δεν έχει σημασία στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων όπου η έννοια του άξονα λήψης δεν υφίσταται, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων των πειραμάτων που έγιναν με θεώρηση μικρότερου οπτικού πεδίου (προσομοίωση της περίπτωσης των συμβατικών εικόνων). Έτσι στα πειράματα αυτά θα πρέπει να επισημανθεί ότι η στροφή περί τον άξονα λήψης δεν είναι η κ, όπως είθισται, αλλά η φ.



Εικόνα 21: Το σύστημα αναφοράς της αριστερής και της δεξιάς εικόνας.

Τον ορισμό των δύο σφαιρικών εικόνων ακολούθησε η δημιουργία των σημείων του χώρου. Το ζητούμενο ήταν να δημιουργηθούν σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο χώρο σε όλες τις διευθύνσεις και σε διαφορετικές αποστάσεις. Έτσι, αποφασίστηκε να δημιουργηθούν σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα πάνω στην επιφάνεια μίας ή περισσότερων σφαιρών με κέντρο το μέσο της βάσης του ζεύγους. Για το σκοπό αυτό η συνάρτηση που συντάχθηκε έκανε χρήση μίας γεννήτριας τυχαίων αριθμών, ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα [0,1], και κατέληγε στην δημιουργία ενός αριθμού σημείων στο χώρο, στην επιφάνεια μίας ή περισσότερων ομόκεντρων σφαιρών. Σημειώνεται πώς το πλήθος των σημείων καθώς και οι αποστάσεις τους από τις εικόνες (δηλαδή η ακτίνα κάθε σφαίρας με κέντρο το μέσο της βάσης) δίνονταν κάθε φορά από το χρήστη για αυτό και εδώ δεν αναφέρονται συγκεκριμένες τιμές. Στην Εικόνα 22 παρουσιάζεται ενδεικτικό παράδειγμα κατανομής σημείων στο χώρο σε ένα από τα πειράματα.



Εικόνα 22: Παράδειγμα κατανομής σημείων στο χώρο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δημιουργήθηκαν σημεία σε όλες τις διευθύνσεις και σε τρεις διαφορετικές αποστάσεις από το μέσο της βάσης του ζεύγους.

Το επόμενο βήμα αφορά την δημιουργία των ομόλογων σημείων πάνω στις εικόνες που πρακτικά αντιστοιχεί στην προβολή των τρισδιάστατων σημείων του χώρου στην επιφάνεια κάθε σφαίρας. Στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων το στάδιο αυτό είναι αρκετά απλό καθώς η εύρεση της θέσης ενός σημείου του χώρου στην εικόνα ισοδυναμεί με την εύρεση του σημείου τομής της οπτικής ακτίνας με την επιφάνεια της σφαίρας. Η απλοποίηση της διαδικασίας έγκειται στην έννοια του εσωτερικού προσανατολισμού όπως αυτή περιγράφηκε στα προηγούμενα (Κεφάλαιο 2) και πρακτικά επιτρέπει τον ορισμό της δέσμης των ακτίνων με βάση το κέντρο της σφαίρας και μόνο. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση όπου το ζητούμενο είναι η δημιουργία των ομόλογων σημείων στην επιφάνεια κάθε σφαίρας, και όχι σε μια δισδιάστατη χαρτογραφική προβολή, αρκεί να βρεθεί το πέρας του μοναδιαίου διανύσματος με αρχή το κέντρο της σφαίρας και κατεύθυνση ίδια με εκείνη της ημιευθείας που ορίζεται από το κέντρο της σφαίρας και το σημείο του χώρου.

Πρακτικά, για την υλοποίηση των παραπάνω αξιοποιήθηκαν οι σχέσεις της προβολικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα οι πίνακες Plücker για την αναπαράσταση μίας τρισδιάστατης ευθείας στον P^3. Ο πίνακας Plücker είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας διαστάσεων 4x4 με τέσσερα μόνο ανεξάρτητα στοιχεία (δηλαδή 4 βαθμούς ελευθερίας ακριβώς όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας μιας ευθείας στον R^3) και προκύπτει ως εξής:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{4.1}$$

όπου **L**, ο πίνακας Plücker και **A**, **B** οι ομογενείς συντεταγμένες δύο σημείων που ορίζουν την ευθεία. Έτσι, κατά αντιστοιχία με τον ορισμό μίας ευθείας στον P^2 όπου προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των ομογενών συντεταγμένων δύο σημείων από τα οποία διέρχεται, στον P^3 μία ευθεία προκύπτει με βάση την παραπάνω σχέση εάν γράψει κανείς τις συντεταγμένες των σημείων στην μορφή $\mathbf{A} = [A1\ A2\ A3\ 1]^{T}$ και $\mathbf{B} = [B1\ B2\ B3\ 1]^{T}$.

Στην προκειμένη περίπτωση κάθε σημείο του χώρου έχει οριστεί με βάση τις τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες του, ενώ το ίδιο ισχύει και για τα δύο σημεία λήψης. Έτσι, η παραπάνω σχέση για τον ορισμό μίας ακτίνας της αριστερής εικόνας (και αντίστοιχα και για την δεξιά εικόνα με βάση τις συντεταγμένες του κέντρου της δεύτερης σφαίρας) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C_1}\mathbf{P}^{\mathbf{T}} - \mathbf{P}\mathbf{C}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}} \tag{4.2}$$

όπου $\mathbf{C_1}$ = $[0\ 0\ 0\ 1]^T$ οι ομογενείς συντεταγμένες του σημείου λήψης της αριστερής εικόνας και $\mathbf{P}$ = $[X\ Y\ Z\ 1]^T$ οι ομογενείς συντεταγμένες ενός σημείου του χώρου.

Από τα έξι μοναδικά στοιχεία του πίνακα **L**, τα τρία εκφράζουν την διεύθυνση της ευθείας στο χώρο και συγκεκριμένα τα τρία πρώτα στοιχεία της τέταρτης γραμμής (ή τα τρία τελευταία στοιχεία της πρώτης γραμμής, ανάλογα με τη φορά της ευθείας, δεδομένου ότι ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός). Η ζητούμενη θέση του σημείου πάνω στη σφαίρα προκύπτει με το να υπολογιστεί το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης της ευθείας αφού η ακτίνα της σφαίρας είναι ίση με τη μονάδα. Αντίστοιχα υπολογίζονται και οι θέσεις των σημείων του χώρου στην επιφάνεια της δεξιάς σφαιρικής εικόνας. Επισημαίνεται ότι στην περίπτωση της δεξιάς εικόνας τα; υπολογιζόμενα μοναδιαία διανύσματα όλων των σημείων του χώρου πρέπει να στραφούν κατά **R** ώστε να αναφέρονται στο σύστημα της δεξιάς εικόνας και όχι στο σύστημα του χώρου.

Στο τέλος του πρώτου σταδίου ήταν διαθέσιμες οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του χώρου και οι συντεταγμένες των σημείων πάνω στην επιφάνεια κάθε σφαίρας και στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς της αντίστοιχης εικόνας.

Προσθήκη θορύβου

Το επόμενο στάδιο αφορά την προσθήκη θορύβου στα δεδομένα, αλλά πριν από την υλοποίηση της διαδικασίας τίθεται το ζήτημα επιλογής των συντεταγμένων στις οποίες θα προστίθεντο ο θόρυβος. Αναλυτικότερα, το πού θα προστεθεί ο θόρυβος συνδέεται άμεσα και με τις μονάδες που θα χρησιμοποιηθούν για την ποσοτικοποίηση του. Με άλλα λόγια, η μέτρηση του θορύβου σε pixel επιβάλλει την προσθήκη θορύβου στο σύστημα των εικονοσυντεταγμένων ενώ η μέτρηση του θορύβου σε μοίρες επιτρέπει την προθήκη θορύβου απευθείας στην επιφάνεια της σφαίρας.

Σε πραγματικές συνθήκες οι μετρήσεις των σημείων γίνονται πάντα στο επίπεδο της εικόνας είτε πρόκειται για συμβατική είτε για σφαιρική, αφού και στην περίπτωση της δεύτερης έχει χρησιμοποιηθεί μία χαρτογραφική προβολή για την ψηφιακή αποθήκευση της εικόνας. Σε πρώτο επίπεδο λοιπόν φαίνεται λογικό ο θόρυβος να υπολογίζεται σε pixel και να προστίθεται στις εικονοσυντεταγμένες x, y των σημείων κάθε εικόνας. Στην συγκεκριμένη όμως περίπτωση όπου τα δεδομένα είναι τεχνητά κάτι τέτοιο θα επέβαλλε να επιλεγεί μία συγκεκριμένη προβολή και να δημιουργηθεί μία εικόνα συγκεκριμένων διαστάσεων. Από την άλλη πλευρά, η προσθήκη θορύβου απευθείας πάνω στη σφαίρα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις ήδη υπολογισμένες τρισδιάστατες συντεταγμένες των σημείων. Εδώ όμως το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς της σφαίρας παίζει ρόλο καθώς γίνεται αντιληπτό ότι είναι διαφορετικό να αλλοιωθούν οι συντεταγμένες X, Y, Z των σημείων και διαφορετικό οι σφαιρικές συντεταγμένες τους φ, λ. Με δεδομένο τον θεωρητικό πυρήνα της φωτογραμμετρίας που τελικά αφορά τον ορισμό και την μελέτη διευθύνσεων, κρίθηκε ορθότερο ο θόρυβος να οριστεί ως γωνιακό μέγεθος και να προστεθεί στις σφαιρικές συντεταγμένες κάθε σημείου.

Έτσι, έγινε μετατροπή των τρισδιάστατων καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων των δύο εικόνων σε σφαιρικές συντεταγμένες και ο θόρυβος ορίστηκε ως γωνιακό μέγεθος. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι η προσθήκη θορύβου στις σφαιρικές συντεταγμένες των σημείων ισοδυναμεί με την προσθήκη θορύβου απευθείας στις εικονοσυντεταγμένες των σημείων, αν υποτεθεί ότι η χρησιμοποιούμενη προβολή είναι η Ορθή Κυλινδρική Ισαπέχουσα (*Plate Carrée*). Το παραπάνω ισχύει στην περίπτωση της συγκεκριμένης προβολής λόγω των σχέσεων που συνδέουν τα x, y με τα φ, λ και οι οποίες είναι γραμμικές:

$$x = R \cdot \lambda \qquad \& \qquad y = R \cdot \varphi \tag{4.3}$$

Η θεώρηση αυτής της προβολής, πέρα από το ότι εξυπηρετεί λόγω της απλότητας των σχέσεων (και ειδικά στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου η ακτίνα R κάθε σφαίρας είναι ίση με τη μονάδα), υποστηρίζεται και από το γεγονός ότι η *Plate Carrée* είναι η πιο διαδεδομένη στο χώρο των πανοραμάτων (*Τσιρώνης, 2015*).

Με βάση όλα τα παραπάνω η συνάρτηση που υλοποιήθηκε για την προσθήκη θορύβου λάμβανε ως όρισμα μία τιμή θορύβου *σ* σε μοίρες και προσέθετε στα σημεία κάθε εικόνας θόρυβο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα –*σ* έως +*σ*. Τέλος, αν θελήσει κανείς για λόγους κατανόησης και ερμηνείας των αποτελεσμάτων να μετατρέψει την τιμή αυτή από μοίρες σε pixel, θα πρέπει να θεωρήσει πρώτα τις διαστάσεις της εικόνας στην προβολή *Plate Carrée*. Στο επόμενο κεφάλαιο όπου γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων οι τιμές του θορύβου αναφέρονται και σε pixel με την θεώρηση εικόνας διαστάσεων 10000x5000 pixels που αποτελεί τυπική διάσταση πανοράματος.

Εκτίμηση αρχικών τιμών

Μετά την ολοκλήρωση της δημιουργίας των δεδομένων είναι πλέον διαθέσιμες οι απαιτούμενες παρατηρήσεις και τα αληθή δεδομένα ώστε να μπορεί να λυθεί το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού και να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα. Το πρώτο βήμα για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού είναι η εκτίμηση αρχικών τιμών για τους αγνώστους, καθώς όπως έχει ήδη αναφερθεί η εξίσωση συνεπιπεδότητας είναι μη γραμμική ως προς τα ζητούμενα στοιχεία του προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας στο σύστημα της αριστερής. Πρακτικά, για την εύρεση αρχικών τιμών υλοποιήθηκε ο γραμμικός αλγόριθμος υπολογισμού του πίνακα **E**, όπως αυτός περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι για την γραμμική επίλυση χρησιμοποιήθηκε το σύνολο των παρατηρήσεων και όχι ο ελάχιστος αριθμός σημείων που απαιτεί ο αλγόριθμος των 8 σημείων.

Για την εκτίμηση των στοιχείων του **E**, ως παρατηρήσεις χρησιμοποιήθηκαν οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες των ομόλογων σημείων στο σύστημα κάθε μίας σφαίρας χωρίς να απαιτείται καμία άλλη ενέργεια. Αναλυτικότερα, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, η χρήση σφαιρικών εικόνων δεν απαιτεί την μετατροπή των συντεταγμένων των ομόλογων σημείων σε ομογενείς αλλά ούτε και την κανονικοποίηση τους όπως συνιστάται στην περίπτωση της κεντρικής προβολής στο επίπεδο (*Hartley, 1995*). Τελικά, υπολογίζονται τα στοιχεία του **E** και από αυτά προκύπτουν οι δύο πιθανοί πίνακες στροφής και τα δύο διανύσματα της μετάθεσης, που οδηγούν στις τέσσερεις λύσεις που δίνει γενικά ο Δεσμευμένος Επιπολικός Πίνακας για τον σχετικό προσανατολισμό. Η εύρεση της ορθής λύσης που αναφέρεται στην επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού στροφής και μετάθεσης γίνεται και στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων μέσω της επίλυσης της εμπροσθοτομίας για ένα τυχαίο ζεύγος ομόλογων σημείων. Εδώ προκύπτει μία ακόμα διαφορά των σφαιρικών από τις συμβατικές εικόνες. Έτσι, ενώ στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων ορθός θεωρείται ο συνδυασμός στροφής και μετάθεσης που αν χρησιμοποιηθεί στην εμπροσθοτομία θα οδηγήσει στον υπολογισμό της θέσης του σημείου μπροστά από τις δύο μηχανές, τα πράγματα στις σφαιρικές εικόνες είναι λίγο διαφορετικά. Αναλυτικότερα, όπως εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων δεν υφίσταται η έννοια «*μπροστά και πίσω*» από την μηχανή (*Kneip et al., 2012*) καθώς εξ ορισμού τα σημεία κατανέμονται σε όλες τις διευθύνσεις. Στις πανοραμικές εικόνες λοιπόν, σωστή θεωρείται η λύση «*για την οποία το σημείο ορίσθηκε από τις "σωστές" ημιευθείες, όπως αυτές προκύπτουν από την κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) που έχουν οι ομόλογες ακτίνες στα τρισδιάστατα Σ.Α. των δύο εικόνων*» (*Τσιρώνης, 2015*). Με άλλα λόγια, θα πρέπει το μοναδιαίο διάνυσμα της θέσης του σημείου πάνω σε κάθε εικόνα να είναι ομόρροπο με το διάνυσμα της θέσης του σημείου στο χώρο με αφετηρία το κέντρο της αντίστοιχης εικόνας. Αυτό πρακτικά το επιτυγχάνει κανείς ελέγχοντας το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων για κάθε μια εικόνα και απαιτώντας να είναι και για τις δύο θετικό.

Μη γραμμική λύση

Μετά την εύρεση των αρχικών τιμών για τους αγνώστους του σχετικού προσανατολισμού, το επόμενο στάδιο είναι η μη γραμμική λύση για κάθε μία από τις επτά συναρτήσεις κόστους που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3. Πριν δοθούν οι απαραίτητες λεπτομέρειες της υλοποίησης της μη γραμμικής επίλυσης ας επισημανθεί ότι οι αρχικές τιμές που υπολογίστηκαν προηγουμένως για την βάση δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν αλλά θα πρέπει πρώτα να δεσμευτεί μια εκ των τριών συνιστωσών καθώς ως γνωστόν τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας υπολογίζονται διατηρώντας την αβεβαιότητας της κλίμακας. Επισημαίνεται ότι αντίστοιχη δέσμευση είχε επιβληθεί και κατά την γραμμική λύση μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών (SVD), επιβάλλοντας ίσες και μη μηδενικές τις δύο πρώτες ιδιοτιμές του πίνακα **E**. Συνεπεία αυτού το διάνυσμα της μετάθεσης που υπολογίστηκε προηγουμένως ώστε να χρησιμοποιηθεί ως αρχική τιμή είχε μέτρο ίσο με τη μονάδα. Για να χρησιμοποιηθεί όμως ως είχε θα έπρεπε η μη γραμμική επίλυση να γίνει με τη μέθοδο των έμμεσων παρατηρήσεων με την επιβολή της επιπλέον δέσμευσης για μοναδιαίο μέτρο της βάσης. Κάτι τέτοιο θα αύξανε την πολυπλοκότητα της υλοποίησης, οπότε ακολουθήθηκε η συνήθης φωτογραμμετρική πρακτική σύμφωνα με την οποία αίρει κανείς την αβεβαιότητα της κλίμακας απλώς θέτοντας την πρώτη συνιστώσα της βάσης (η οποία είναι συνήθως η μεγαλύτερη) ίση με 1 και διαιρώντας με αυτήν τις άλλες δύο συνιστώσες.

Η επίλυση για κάθε μία από τις επτά συναρτήσεις σφάλματος έγινε με χρήση της έτοιμης συνάρτησης lsqnonlin που διαθέτει το MATLAB και χρησιμοποιεί το αλγόριθμο Levenberg - Marquardt για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της συνάρτησης. Για κάθε μία συνάρτηση σφάλματος μετά την επίλυση, εκτός από το διάνυσμα των καλύτερων τιμών αγνώστων, εξάγονταν το διάνυσμα των υπολοίπων και ο πίνακας σχεδιασμού **A** ώστε να μπορούν να υπολογιστούν στη συνέχεια τα απαιτούμενα μέτρα ακρίβειας για την αξιολόγηση κάθε συνάρτησης.

Μέτρα αξιολόγησης ποιότητας

Για την αξιολόγηση των συναρτήσεων σφάλματος, στο τελευταίο στάδιο της διαδικασίας ορίστηκαν και υπολογίστηκαν τα κατάλληλα μέτρα ακρίβειας με βάση τα εξαγόμενα στοιχεία της συνόρθωσης. Παρουσιάζονται συνοπτικά τα μέτρα αυτά που αποτελούν και την βάση ερμηνείας των αποτελεσμάτων που γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

- Τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους (σ_0)

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{n-5}} \tag{4.4}$$

όπου v: το διάνυσμα των υπολοίπων της εξίσωσης παρατήρησης και n: το πλήθος των ομόλογων σημείων που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση.

Η ερμηνεία του σφάλματος αυτού σχετίζεται άμεσα με την ποσότητα που ελαχιστοποιείται σε κάθε συνόρθωση καθώς οι μονάδες μέτρησής του είναι ίδιες με τις μονάδες που έχει το εκάστοτε σφάλμα κλεισίματος. Η συγκεκριμένη ποσότητα αποτελεί ένα στατιστικό μέγεθος που σχετίζεται με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος, για αυτό άλλωστε το μέγεθος της μεταβολής του σ_0 μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων χρησιμοποιείται συχνά ως κριτήριο σύγκλισης της συνόρθωσης. Με άλλα λόγια η σύγκλιση της συνόρθωσης προϋποθέτει μικρές τιμές για το σ_0 χωρίς όμως αυτό να σημαίνει απαραίτητα ότι η σύγκλιση έχει γίνει στο ορθό ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος.

- Τυπική απόκλιση (σ_x)

Το σφάλμα εκτίμησης για κάθε άγνωστο του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα μέσω του εξαγόμενου πίνακα σχεδιασμού **A** της συνόρθωσης. Αναλυτικότερα, από τον πίνακα **A** υπολογίζεται ο πίνακας μεταβλητότητας–συμμεταβλητότητας $\mathbf{V_x}$, τα στοιχεία της διαγωνίου του οποίου αντιστοιχούν στην μεταβλητότητα κάθε ενός από τους αγνώστους (δηλαδή στο τετράγωνο της τυπικής απόκλισης). Βάσει αυτού τα σφάλματα για κάθε έναν άγνωστο υπολογίζονται στις μονάδες μέτρησης της εκτιμώμενης τιμής του. Έτσι, η τυπική απόκλιση των δύο συνιστωσών της βάσης αποτελεί ένα γραμμικό αδιάστατο μέγεθος, η αξιολόγηση του οποίου μπορεί να γίνει σε σύγκριση με την εκτιμώμενη τιμή κάθε συνιστώσας και λαμβανομένης υπόψη της δέσμευσης που έχει επιβληθεί στην συνόρθωση για $b_x = 1$. Αντίστοιχα, τα σφάλματα για τις τρεις άγνωστες στροφές του σχετικού προσανατολισμού υπολογίζονται προφανώς σε μονάδες μέτρησης γωνιών. Προκειμένου να είναι ευκολότερη η ερμηνεία του σφάλματος κάθε αγνώστου αλλά και η συγκριτική αξιολόγηση μεταξύ τους, κρίνεται σκόπιμη η μετατροπή των δύο γραμμικών μεγεθών σε γωνιακά. Αυτό απαιτεί καταρχάς την μετατροπή των δύο συνιστωσών της βάσης σε δύο γωνίες που ορίζουν την διεύθυνση της βάσης στο χώρο. Για την μετατροπή αυτή χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις που ισχύουν στην περίπτωση που έχει τεθεί $b_x = 1$ (*Φλωρίδη, 2016*):

$$by_{angular} = \tan^{-1}\left(\frac{by}{bx}\right) \tag{4.5}$$

$$bz_{angular} = \tan^{-1}\left(\frac{-bz}{\sqrt{bx^2+by^2}}\right) \quad (4.6)$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης σφαλμάτων στις παραπάνω σχέσεις, παίρνει κανείς τις ακόλουθες εξισώσεις υπολογισμού των σφαλμάτων των συνιστωσών της βάσης σε μονάδες μέτρησης γωνιών (*Φλωρίδη, 2016*):

$$\sigma_{by,angular} = \frac{1}{1+by^2} \cdot \sigma_{by} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{bz,angular} = \frac{1}{1+\frac{bz}{\sqrt{1+by^2}}} \cdot \sigma_{bz} \quad (4.8)$$

- Συνολικό γωνιακό σφάλμα

Με βάση τις μετατροπές που προηγήθηκαν και τον υπολογισμό των γωνιακών σφαλμάτων για την βάση, καθίσταται εφικτός ο ορισμός και ο υπολογισμός ενός μοναδικού μέτρου αξιολόγησης της ακρίβειας των παραμέτρων του προσανατολισμού. Έτσι, με δεδομένο ότι οι εκφράσεις των σφαλμάτων είναι συμβατές μεταξύ τους, μπορεί να υπολογιστεί ένα συνολικό γωνιακό σφάλμα με βάση την παρακάτω εξίσωση (*Φλωρίδη, 2016*):

$$\sigma_{angular} = \sqrt{\frac{\sigma_{by,angular}^2+\sigma_{bz,angular}^2+\sigma_\omega^2+\sigma_\varphi^2+\sigma_\kappa^2}{5}} \quad (4.9)$$

Ο υπολογισμός ενός μοναδικού μέτρου ακρίβειας διευκολύνει σημαντικά την συγκριτική αξιολόγηση των συναρτήσεων σφάλματος και ταυτόχρονα εκφράζει την συνολική εικόνα της ακρίβειας κάθε μίας συνάρτησης.

- Πίνακας συσχέτισης

Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στις τιμές των σφαλμάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, παρόλα αυτά για να έχει κανείς πιο ολοκληρωμένη εικόνα θα πρέπει να διερευνηθεί και η ύπαρξη συσχετίσεων μεταξύ των τιμών των αγνώστων. Ο συντελεστής συσχέτισης ρ μεταξύ δύο άγνωστων παραμέτρων x, y υπολογίζεται ως:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4.10)$$

Στην παραπάνω εξίσωση εμπλέκονται η συμμεταβλητότητα και οι τυπικές αποκλίσεις των αγνώστων, στοιχεία που αντλούνται όλα από τον πίνακα $\mathbf{V_x}$ που έχει ήδη υπολογιστεί.

- Απόλυτες διαφορές

Όλα τα αναφερθέντα μέτρα εκτίμησης της ακρίβειας είναι στατιστικά μεγέθη που προκύπτουν από την διαδικασία της συνόρθωσης και επηρεάζονται από τα επίπεδα θορύβου, το πλήθος και την κατανομή των σημείων αλλά και τα χαρακτηριστικά κάθε εξίσωσης. Ένα αδιαμφισβήτητο μέτρο αξιολόγησης της ακρίβειας κάθε συνάρτησης σφάλματος είναι προφανώς και η σύγκριση των εκτιμώμενων τιμών των αγνώστων με τις πραγματικές τιμές (ground truth). Για το σκοπό αυτό υπολογίστηκαν και παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο οι απόλυτες διαφορές μεταξύ πραγματικών και εκτιμώμενων τιμών εκφρασμένες όλες σε γωνιακά μεγέθη.

- Ακρίβεια εμπροσθοτομίας

Τα μέτρα που παρουσιάστηκαν αφορούν όλα την ακρίβεια επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού. Πέρα όμως από την αξιολόγηση της καταλληλότητας κάθε συνάρτησης σφάλματος για την εκτίμηση των παραμέτρων του προσανατολισμού, κρίθηκε σκόπιμο να αξιολογηθεί η ακρίβεια και ως προς την επίλυση της εμπροσθοτομίας. Κάτι τέτοιο απαιτεί κατ' αρχάς υλοποίηση της επίλυσης της εμπροσθοτομίας και στην συνέχεια ορισμό ενός κατάλληλου μέτρου για την εκτίμηση της τελικής ακρίβειας. Η λογική πίσω από τον υπολογισμό ενός τέτοιου μέτρου βασίζεται πρώτα από όλα στην αξιολόγηση των συναρτήσεων σφάλματος ως προς ένα διαφορετικό πρόβλημα που συναντάται σε πλήθος εφαρμογών. Αναλυτικότερα, με βάση τα προηγούμενα μέτρα και κυρίως με βάση τις διαφορές με τα αληθή δεδομένα μπορεί να προκύψει σαφής εικόνα για το κατά πόσο μία εξίσωση είναι κατάλληλη για την επίλυση του προβλήματος προσδιορισμού της θέσης (pose estimation). Σε πολλές όμως εφαρμογές η τρισδιάστατη ανακατασκευή αποτελεί το επόμενο και κυριότερο, στάδιο του προσανατολισμού, και για το λόγο αυτό έχει ενδιαφέρον να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα και ως προς αυτό το κριτήριο. Επιπλέον, στην επίλυση της εμπροσθοτομίας δεν ενδιαφέρουν πλέον τυχόν συσχετίσεις μεταξύ των αγνώστων του προσανατολισμού υπό την έννοια ότι μπορεί παράμετροι του προσανατολισμού με μεγάλα σφάλματα αλλά και υψηλές τιμές συσχέτισης μεταξύ τους να δώσουν τελικά καλή ακρίβεια στην επίλυση της εμπροσθοτομίας.

Για την επίλυση της εμπροσθοτομίας υλοποιήθηκε η γραμμική λύση που παρουσιάζουν οι Hartley & Zisserman (*2000*) κατάλληλα προσαρμοσμένη για ζεύγος σφαιρικών εικόνων. Συγκεκριμένα οι Hartley & Zisserman (*2000*) επιλύουν ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων που προκύπτουν από το μηδενισμό του εξωτερικού γινομένου δύο παράλληλων διανυσμάτων για κάθε μία εικόνα:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}\times(\mathbf{PX}) = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{P}'\cdot\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}'\times(\mathbf{P}'\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

όπου **x**, **x'**: οι ομογενείς συντεταμένες των ομόλογων σημείων για την αριστερή και την δεξιά εικόνα αντίστοιχα, **P**, **P'**: οι προβολικοί πίνακες των δύο μηχανών και **X**: οι άγνωστες συντεταγμένες του σημείου στο χώρο. Η σχέση του εξωτερικού γινομένου δίνει τρεις εξισώσεις για κάθε εικόνα, εκ των οποίων μόνο οι δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έτσι, για ένα ζεύγος ομόλογων σημείων προκύπτουν 4 ανεξάρτητες εξισώσεις οι οποίες είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες συντεταγμένες του σημείου στο χώρο.

Κατά αντιστοιχία με το παραπάνω, για ζεύγος σφαιρικών εικόνων μπορούν να προκύψουν οι ακόλουθες εξισώσεις με την θεώρηση ότι είναι συγγραμμικά μεταξύ τους το διάνυσμα του σημείου στην επιφάνεια κάθε σφαίρας με το διάνυσμα από το κέντρο κάθε σφαίρας στη θέση του σημείου στο χώρο:

$$(\mathbf{x_1}-\mathbf{C_1})\times(\mathbf{P}-\mathbf{C_1}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x_1}\times\mathbf{P} = \mathbf{0} \tag{4.12}$$

$$(\mathbf{x_2}-\mathbf{C_2})\times(\mathbf{P}-\mathbf{C_2}) = \mathbf{0} \tag{4.13}$$

όπου $\mathbf{C_1} = [0\ 0\ 0]^T$ το κέντρο της αριστερής εικόνας, $\mathbf{C_2} = [1\ by\ bz]^T$ το κέντρο της δεξιάς εικόνας, $\mathbf{x_1} = [x1\ y1\ z1]^T$ οι συντεταγμένες του σημείου στην επιφάνεια της αριστερής εικόνας, $\mathbf{x_2} = [x2\ y2\ z2]^T$ οι συντεταγμένες του σημείου στην επιφάνεια της δεξιάς στραμμένες στο σύστημα του χώρου και $\mathbf{X} = [X\ Y\ Z]^T$ οι άγνωστες συντεταγμένες του σημείου στο χώρο.

Από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνονται 2 από τις 3 εξισώσεις που προκύπτουν για κάθε εικόνα και δημιουργείται ένα σύστημα της μορφής **AX** = **b**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -z1 & y1 \\ z1 & 0 & -x1 \\ 0 & Z - z2 & y2 - Y \\ z2 - Z & 0 & -x2 + X \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y2 * Z - z2 * Y \\ z2 * X - x2 * Z \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Μετά από την επίλυση της εμπροσθοτομίας μπορούν να οριστούν δύο νέες ακτίνες, από το κέντρο κάθε μίας εικόνας στην εκτιμώμενη θέση του σημείου στο χώρο. Έτσι για κάθε εικόνα υπολογίζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ακτίνων που ξεκινούν από το κέντρο της και καταλήγουν στην εκτιμώμενη και στην πραγματική θέση του σημείου. Η τελική ακρίβεια της εμπροσθοτομίας υπολογίζεται ως γωνιακό μέγεθος και συγκεκριμένα ως ο μέσος ο όρος των παραπάνω γωνιών για τις δύο εικόνες.

Ολοκληρώνοντας τον ορισμό των απαιτούμενων μέτρων ακρίβειας μπορεί πλέον να παρουσιάσει και να αξιολογήσει κανείς τα αποτελέσματα στο επόμενο κεφάλαιο. Για λόγους καλύτερης παρουσίασης και ευκολότερης κατανόησης των αποτελεσμάτων οι προαναφερθείσες τιμές σφαλμάτων παρουσιάζονται στις περισσότερες περιπτώσεις μέσω κατάλληλων διαγραμμάτων.

5

Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του συνόλου των πειραμάτων που έγιναν με στόχο την αξιολόγηση των επτά διαφορετικών συναρτήσεων σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού υπό την επίδραση διαφορετικών παραμέτρων. Η πρώτη παράμετρος που κρίθηκε σκόπιμο να αξιολογηθεί ήταν η επίδραση του θορύβου των παρατηρήσεων στα αποτελέσματα κάθε μίας συνάρτησης σφάλματος. Να σημειωθεί ότι το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού αναφέρεται κατά κανόνα στην υπάρχουσα βιβλιογραφία ως πολύ ευαίσθητο στην παρουσία θορύβου, και επομένως η ανάλυση της συμπεριφοράς κάθε εξίσωσης ως προς αυτόν κρίθηκε αναγκαία. Η δεύτερη και εκτενέστερη ομάδα πειραμάτων αφορά την επίδραση της γεωμετρίας των σημείων στα αποτελέσματα. Έτσι, στην σχετική ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από διαφορετικές κατανομές σημείων στο χώρο, με μεταβολή είτε των αποστάσεών τους από τα σημεία λήψης είτε των διευθύνσεων που ορίζουν στο χώρο. Η επόμενη ενότητα αφορά τον έλεγχο της ευαισθησίας κάθε μίας συνάρτησης ως προς τη μεταβολή των αρχικών τιμών των αγνώστων. Η τελευταία ενότητα αφορά την διερεύνηση της συμπεριφοράς κάθε μίας συνάρτησης ως προς τις τιμές των παραμέτρων του προσανατολισμού των εικόνων προκειμένου να διαπιστωθεί εάν και πώς επιδρούν η θέση ο προσανατολισμός της δεξιάς εικόνας στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού. Στα επόμενα παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα κάθε περίπτωσης μέσω κατάλληλων γραφημάτων για τα υπολογισμένα μέτρα ακρίβειας που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επισημαίνεται ότι επιπλέον αριθμητικά αποτελέσματα (πλην των βασικών μέτρων ακρίβειας και ποιότητας κάθε λύσης) αναφέρονται όπου αυτό κρίθηκε σκόπιμο για την κατανόηση και ανάδειξη των ιδιαιτεροτήτων κάθε περίπτωσης.

Σε όλα τα πειράματα (εκτός από όπου αναφέρεται διαφορετικά, το οποίο συγκεκριμένα συναντάται στην τελευταία μόνο ενότητα) θεωρήθηκε ζεύγος εικόνων με σταθερή την αριστερή (θεωρείται σημείο λήψης στην αρχή του συστήματος αναφοράς του στερεομοντέλου και μοναδιαίος πίνακας στροφής, όπως συμβαίνει στην περίπτωση του εξαρτημένου σχετικού προσανατολισμού) και με την δεξιά εικόνα να έχει σημείο λήψης $\mathbf{C_2}$ = $[6\ 0\ 4]^T$ και γωνίες στροφής $[\omega\ \varphi\ \kappa] = [10^\circ\ 45^\circ\ 15^\circ]$. Τέλος, όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται προέκυψαν μετά από την διενέργεια 500 επαναλήψεων για κάθε ένα πείραμα και τον υπολογισμό του μέσου όρου για κάθε μέτρο αξιολόγησης.

Επίδραση θορύβου

Η πρώτη παράμετρος που αξιολογήθηκε ήταν η επίδραση του θορύβου στις θέσεις των ομόλογων σημείων. Για το σκοπό αυτό διακρίθηκαν δύο περιπτώσεις, μία για χαμηλά και μία για υψηλά επίπεδα θορύβου. Και στις δύο περιπτώσεις, σε κάθε μία επίλυση χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 300 σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλες τις διευθύνσεις και σε τρεις διαφορετικές αποστάσεις. Συγκεκριμένα, θεωρήθηκαν 100 σημεία σε απόσταση 20, 40 και 60 μονάδων από το μέσο της βάσης του στερεοζεύγους.

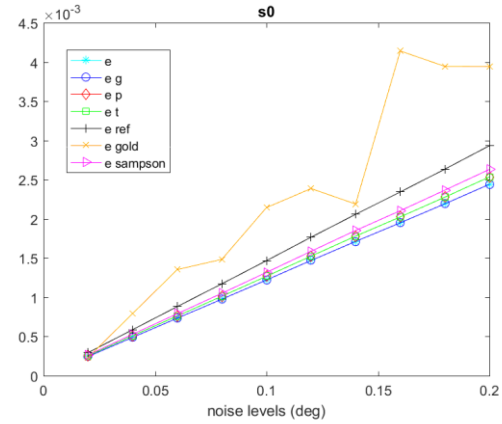
Α. Απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων για χαμηλά επίπεδα θορύβου.
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε «κανονικές» αποστάσεις για χαμηλά επίπεδα θορύβου.

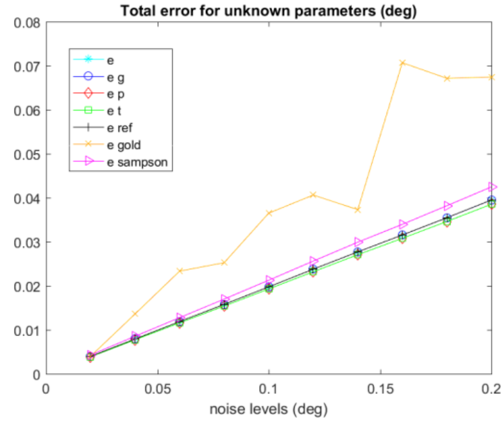
Στο πείραμα αυτό θεωρήθηκαν 10 διαφορετικά επίπεδα θορύβου από 0.02° έως 0.20° με βήμα 0.02°. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η τάξη μεγέθους του προστιθέμενου θορύβου, μπορεί να θεωρηθεί μία τυπική πανοραμική εικόνα διαστάσεων 10000x5000 pixel. Έτσι, στην περίπτωση αυτή τα παραπάνω επίπεδα θορύβου αντιστοιχούν σε θόρυβο από 0.5 έως 5 pixel.

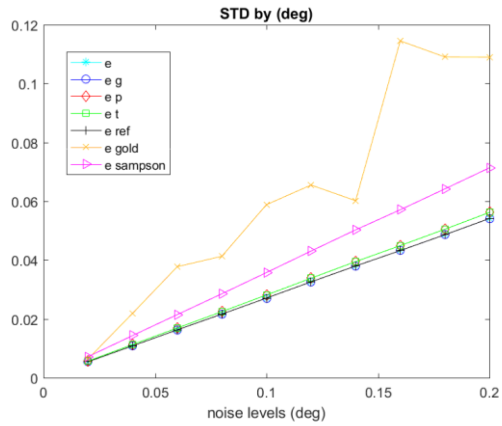
σ_0							
Noise	ε	ε_g	ε_p	ε_t	ε reform	ε gold	ε sampson
0.02	0.00024	0.00024	0.00025	0.00025	0.00029	0.00023	0.00026
0.04	0.00049	0.00049	0.00051	0.00051	0.00059	0.00079	0.00053
0.06	0.00073	0.00073	0.00076	0.00076	0.00088	0.00135	0.00079
0.08	0.00097	0.00097	0.00101	0.00101	0.00117	0.00148	0.00105
0.10	0.00122	0.00122	0.00127	0.00127	0.00147	0.00214	0.00132
0.12	0.00147	0.00147	0.00152	0.00152	0.00177	0.00239	0.00159
0.14	0.00171	0.00171	0.00178	0.00178	0.00206	0.00219	0.00185
0.16	0.00195	0.00195	0.00202	0.00202	0.00234	0.00414	0.00210
0.18	0.00219	0.00219	0.00228	0.00228	0.00263	0.00394	0.00237
0.20	0.00244	0.00244	0.00253	0.00253	0.00293	0.00394	0.00263

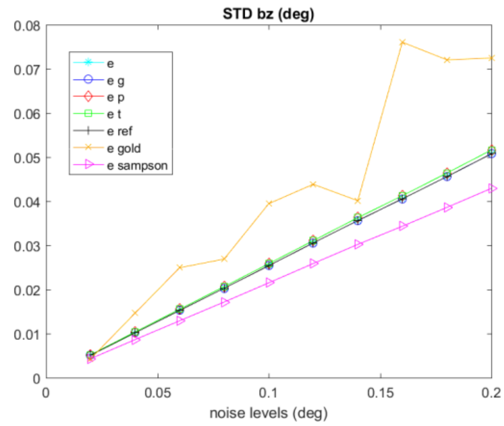
σ_{total} (deg)							
Noise	ε	ε_g	ε_p	ε_t	ε reform	ε gold	ε sampson
0.02	0.00394	0.00394	0.00385	0.00385	0.00394	0.00395	0.00425
0.04	0.00790	0.00790	0.00773	0.00773	0.00790	0.01359	0.00853
0.06	0.01186	0.01186	0.01157	0.01157	0.01186	0.02333	0.01276
0.08	0.01577	0.01577	0.01540	0.01540	0.01577	0.02524	0.01697
0.10	0.01974	0.01974	0.01927	0.01927	0.01975	0.03650	0.02126
0.12	0.02377	0.02377	0.02318	0.02318	0.02377	0.04062	0.02561
0.14	0.02770	0.02770	0.02706	0.02706	0.02770	0.03730	0.02990
0.16	0.03154	0.03154	0.03079	0.03079	0.03155	0.07069	0.03396
0.18	0.03546	0.03546	0.03461	0.03461	0.03547	0.06714	0.03819
0.20	0.03949	0.03949	0.03853	0.03853	0.03950	0.06745	0.04247

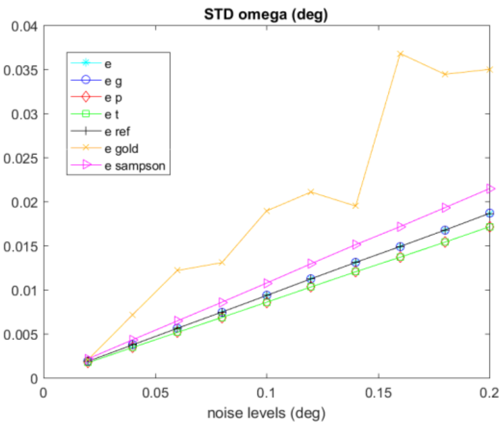
Στους παραπάνω πίνακες παρουσιάζονται οι τιμές του τυπικού σφάλματος της συνόρθωσης (σ_0) και του συνολικού γωνιακού σφάλματος (σ_{total}) κάθε μίας εξίσωσης (**ε, ε_g, ε_p, ε_t, ε_{reform}, ε_{gold}, $\varepsilon_{sampson}$**) για κάθε ένα επίπεδο θορύβου. Υπενθυμίζεται ότι το συνολικό σφάλμα αποτελεί ένα μοναδικό μέτρο αξιολόγησης της ακρίβειας όλων των παραμέτρων του προσανατολισμού και ο υπολογισμός του βασίζεται στην εξίσωση 4.9 που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για την γεωμετρική ερμηνεία και την αναλυτική μορφή κάθε μίας εξίσωσης σφάλματος ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην ενότητα 2 του κεφαλαίου 3. Για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων και την διευκόλυνση της αξιολόγησής τους, ακολούθως παρατίθενται και γραφήματα των τιμών των σφαλμάτων κάθε ενός αγνώστου ως προς τα επίπεδα θορύβου.

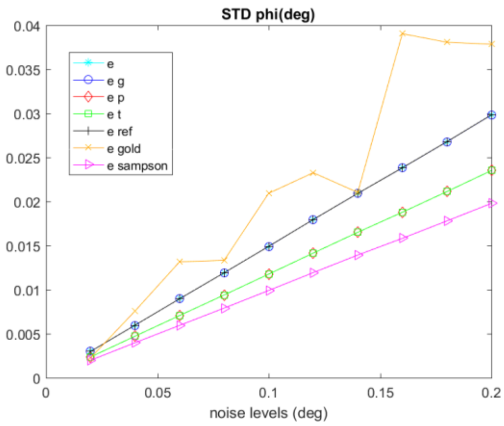


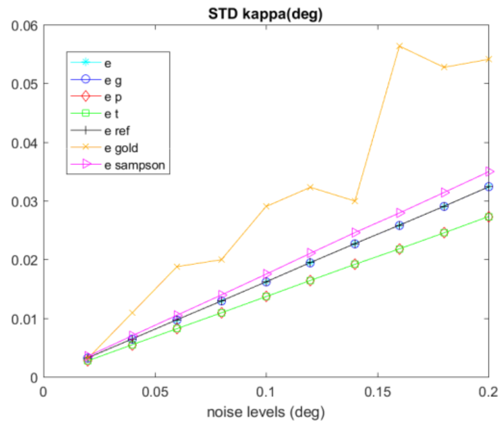


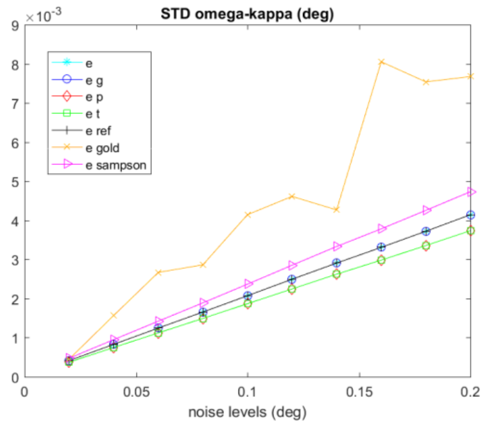












Από το σύνολο των παραπάνω γραφημάτων παρατηρείται ότι για τα χαμηλά επίπεδα θορύβου που θεωρήθηκαν στο συγκεκριμένο πείραμα, η ακρίβεια όλων των εξισώσεων μεταβάλλεται αναλογικά με το θόρυβο. Αναλυτικότερα, η γραμμική μεταβολή παρατηρείται όχι μόνο στα συνολικά μέτρα ακρίβειας κάθε εξίσωσης αλλά και στα επιμέρους γωνιακά σφάλματα που υπολογίζονται για κάθε άγνωστο. Μοναδική εξαίρεση σε αυτό αποτελεί η συνάρτηση σφάλματος $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ η οποία διαφοροποιείται σημαντικά από τις υπόλοιπες τόσο ως προς τις υπολογιζόμενες τιμές των σφαλμάτων όσο και ως προς την μορφή των γραφημάτων.

Αναλυτικότερα, η εξίσωση του gold standard error εμφανίζει τις υψηλότερες τιμές σε όλα τα υπολογιζόμενα σφάλματα και για όλα τα επίπεδα θορύβου, πλην του πρώτου που είναι πολύ χαμηλό. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η απόκλιση των σφαλμάτων αυτής της εξίσωσης από τις υπόλοιπες έξι αυξάνει με τον θόρυβο. Άρα, με βάση τα αποτελέσματα αυτά, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι το gold standard error δεν είναι η πλέον κατάλληλη συνάρτηση σφάλματος για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων, παρά μόνο ίσως όταν ο θόρυβος είναι πολύ χαμηλός. Μία πιθανή εξήγηση για την συμπεριφορά αυτής της εξίσωσης είναι ότι η ποσότητα που ελαχιστοποιείται κατά την επίλυση είναι μεν ένα γεωμετρικό μέγεθος με φυσική ερμηνεία αλλά αφορά σε μία απόσταση μετρημένη στο επίπεδο, κατάλληλη για χρήση σε συμβατικές εικόνες.

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις σφάλματος παρατηρείται ότι ανάλογα με το ποιο μέτρο ακρίβειας εξετάζεται κάθε φορά αλλάζει και η κατάταξή τους. Έτσι, με κριτήριο το συνολικό γωνιακό σφάλμα καλύτερα αποτελέσματα φαίνεται να έχουν τα σφάλματα της κάθετης και της εφαπτομενικής απόστασης, $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$. Αντίθετα, το $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$ (Sampson error), για παράδειγμα, που με βάση το συνολικό γωνιακό αλλά και τα σφάλματα των b_y, ω και κ είναι το δεύτερο χειρότερο, με βάση τα σφάλματα των b_z και φ φαίνεται να είναι το καλύτερο. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μεταξύ της συνιστώσας z της βάσης και της γωνίας φ υπολογίζεται μία μέτρια αρνητική συσχέτιση ίση με - 0.3. Παρ' όλα αυτά, αν ληφθούν υπόψη συνολικά όλα τα διαγράμματα καλύτερη εικόνα παρουσιάζουν τα $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$, αν και οι διαφορές με τις υπόλοιπες εξισώσεις είναι αριθμητικά μικρές (<0.005˚).

Αναφορικά με την ακρίβεια υπολογισμού κάθε ενός αγνώστου, παρατηρείται ότι για όλες τις εξεταζόμενες συναρτήσεις οι τιμές των σφαλμάτων για την b_y είναι μεγαλύτερες από τις τιμές που υπολογίζονται για τους υπόλοιπους αγνώστους. Ειδικότερα, οι διαφορές αυτές είναι μικρότερες σε σύγκριση με τα υπολογιζόμενα σφάλματα για την άλλη συνιστώσα της βάσης και μεγαλύτερες αν συγκριθούν με τα αντίστοιχα σφάλματα που υπολογίζονται για τις άγνωστες στροφές. Να σημειωθεί ότι το τελευταίο αποτελεί μία πρώτη ένδειξη της αύξησης της ακρίβειας υπολογισμού των στροφών όταν χρησιμοποιούνται σφαιρικές εικόνες, η οποία όμως χρήζει περαιτέρω διερεύνησης.

Ένα ακόμα στοιχείο που αξίζει να σχολιασθεί είναι ότι τα σφάλματα των στροφών ω και κ παρουσιάζουν παρόμοια εικόνα και τιμές για όλες τις συναρτήσεις, γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι οι δύο αυτοί άγνωστοι είναι συσχετισμένοι μεταξύ τους. Πράγματι, από τα αναλυτικά αποτελέσματα κάθε εξίσωσης για κάθε επίπεδο θορύβου παρατηρείται ότι εμφανίζεται υψηλός συντελεστής συσχέτισης περίπου ίσος με -0.9. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το τελευταίο διάγραμμα στο οποίο αναπαρίσταται για κάθε εξίσωση σφάλματος το σφάλμα της συνδυασμένης γωνίας στροφής ω και κ (το οποίο υπολογίζεται μέσω του νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων) και είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερο από τα επιμέρους σφάλματα.

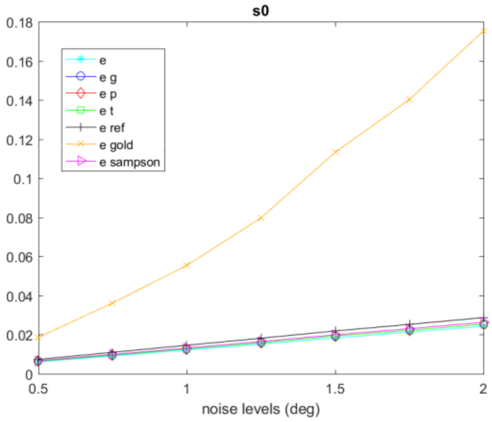
Β. Απλή Περίπτωση σφαιρικών εικόνων για υψηλά επίπεδα θορύβου.

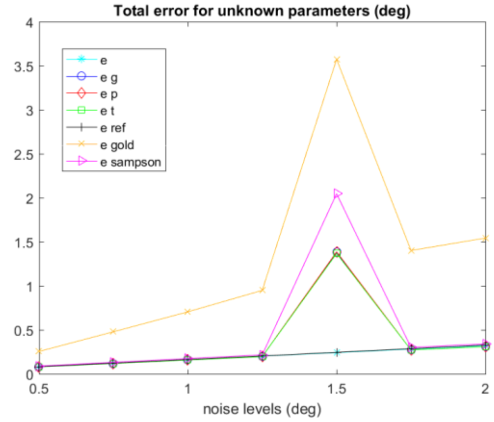
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε «κανονικές» αποστάσεις για υψηλά επίπεδα θορύβου

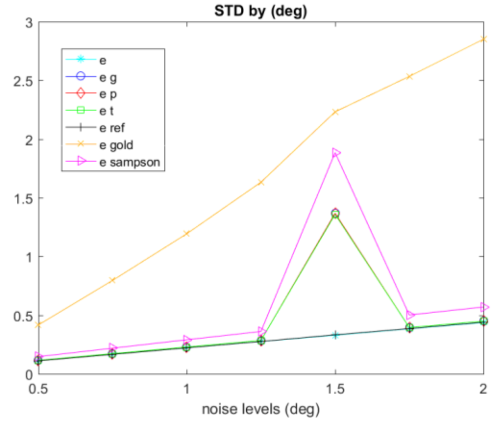
Εδώ θεωρήθηκαν επίπεδα υψηλότερου θορύβου (0.5° έως 2° με βήμα 0.25°). Αν θεωρηθεί και πάλι μία τυπική πανοραμική εικόνα διαστάσεων 10000x5000 pixel, τα παραπάνω επίπεδα θορύβου αντιστοιχούν σε θόρυβο 15-50 pixel.

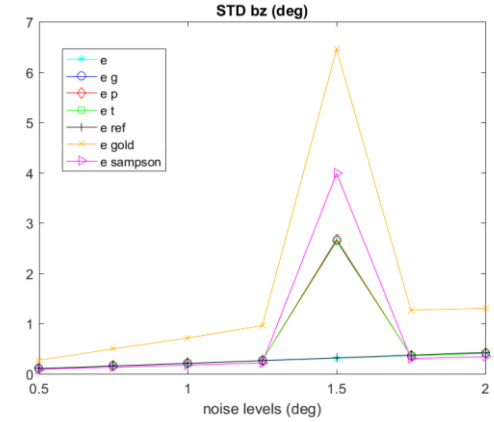
σ_0							
noise	ε	ε_g	ε_p	ε_t	ε reform	ε gold	ε sampson
0.50	0.00610	0.00635	0.00635	0.00635	0.00733	0.01864	0.00661
0.75	0.00915	0.00952	0.00952	0.00952	0.01097	0.03618	0.00989
1.00	0.01220	0.01270	0.01270	0.01270	0. 01460	0. 05540	0. 01319
1.25	0.01521	0.01585	0.01585	0.01586	0. 01816	0. 07971	0. 01646
1.50	0.01824	0.01926	0.01926	0.01927	0. 02189	0. 11319	0. 01992
1.75	0.02130	0.02221	0.02221	0.02222	0. 02527	0. 14024	0. 02306
2.00	0.02429	0.02536	0.02536	0.02538	0.02871	0.17529	0.02633

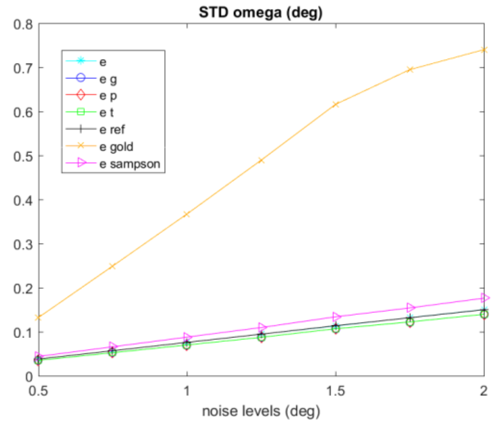
std total (deg)							
noise	ε	ε_g	ε_p	ε_t	ε reform	ε gold	ε sampson
0.50	0.08049	0.07848	0.07848	0.07848	0.08059	0.25370	0.08678
0.75	0.12063	0.11754	0.11754	0.11753	0.12095	0.47711	0.12971
1.00	0.16084	0.15642	0.15642	0.15642	0.16159	0.70385	0.17252
1.25	0.20060	0.19467	0.19467	0.19467	0.20204	0.94771	0.21476
1.50	0.24048	1.38115	1.38509	1.36741	0.24387	3.57346	2.04532
1.75	0.28082	0.27029	0.27030	0.27028	0.28471	1.40042	0.29932
2.00	0.32018	0.30744	0.30745	0.30744	0.32588	1.54230	0.34042

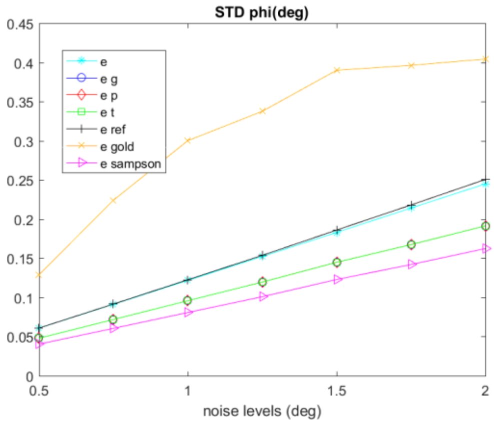

s0
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)

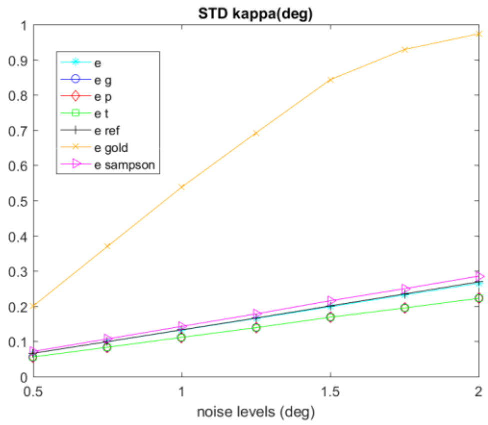

Total error for unknown parameters (deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)


STD by (deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)


STD bz (deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)


STD omega (deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)


STD phi(deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
noise levels (deg)



Για τα υψηλότερα επίπεδα θορύβου η εικόνα μεταξύ των διαφορετικών εξισώσεων δεν μεταβάλλεται σημαντικά, εκείνο που αλλάζει βέβαια είναι οι τιμές των υπολογιζόμενων σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, σε σύγκριση με προηγουμένως εδώ παρατηρείται ότι τα σφάλματα όλων των αγνώστων έχουν αυξηθεί κατά μία τάξη μεγέθους περίπου για όλες τις συναρτήσεις σφάλματος. Η συνάρτηση του $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ εξακολουθεί να έχει την χειρότερη επίδοση, και μάλιστα εδώ η ακρίβειά της υπολογίζεται σημαντικά χαμηλότερη από την ακρίβεια των άλλων συναρτήσεων. Αναφορικά με την ελαχιστοποίηση του κάθε κριτηρίου, από το διάγραμμα των τιμών του σ_0 παρατηρείται ότι το $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ διαφέρει σημαντικά από τις άλλες εξισώσεις ειδικά όσο αυξάνει ο θόρυβος, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει κίνδυνος αδυναμίας λύσης όταν ο θόρυβος αυξηθεί σημαντικά.

Στα διαγράμματα των τυπικών σφαλμάτων των συνιστωσών της βάσης φαίνεται ότι όλες οι εξισώσεις εκτός από τα $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{reform}}$ (η συνεπιπεδότητα στην κλασική της μορφή και η παραλλαγή της που προτείνεται στο πλαίσιο της εργασίας) εμφανίζουν μεγάλη επιδείνωση της ακρίβειας για το επίπεδο θορύβου 1.5˚. Με δεδομένο ότι τα αποτελέσματα για κάθε επίπεδο θορύβου έχουν προκύψει μετά από 500 επαναλήψεις, δεν υπάρχει σαφής εικόνα του λόγου για τον οποίο παρατηρείται αυτό. Εκείνο όμως που μπορεί να εξαχθεί ως συμπέρασμα είναι ότι όποιος και αν είναι ο παράγοντας που οδήγησε σε αυτήν την εικόνα, αυτός δεν έχει επίδραση στις συναρτήσεις $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{reform}}$, και άρα αυτές εμφανίζονται ως καταλληλότερες όταν ο θόρυβος είναι υψηλός.

Από την άλλη πλευρά, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στα διαγράμματα των τυπικών αποκλίσεων των στροφών δεν παρατηρείται αντίστοιχη εικόνα. Ειδικότερα, σε αυτά όλες οι συναρτήσεις σφάλματος συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, και συγκεκριμένα η ακρίβειά τους επιδεινώνεται και πάλι αναλογικά με το επίπεδο θορύβου των παρατηρήσεων. Από το τελευταίο προκύπτει και πάλι ότι πράγματι υπάρχει διαφοροποίηση στην ακρίβεια εκτίμησης της βάσης από την ακρίβεια εκτίμησης των στροφών.

Βάσει αυτών, φαίνεται ότι η παράμετρος του θορύβου προφανώς και επηρεάζει την ακρίβεια της επίλυσης και μάλιστα δεν επιδρά το ίδιο και με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις εξισώσεις. Για χαμηλότερα επίπεδα θορύβου καταλληλότερες φαίνεται να είναι οι εξισώσεις $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$, ενώ όταν ο θόρυβος αυξηθεί σημαντικά οι $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{reform}}$ δεν παρουσιάζουν ευαισθησία σε αντίθεση με τις υπόλοιπες. Τέλος, επισημαίνεται ότι το $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ μολονότι συνιστάται να χρησιμοποιείται στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων, παρουσιάζει πολύ κατώτερα αποτελέσματα για ζεύγος σφαιρικών εικόνων.

Επίδραση γεωμετρίας

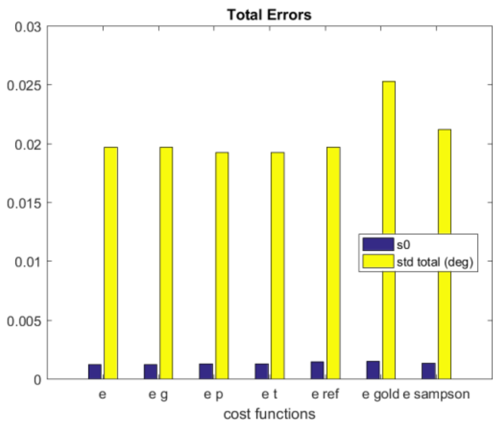
Στην ενότητα αυτή εξετάζεται κάθε μία συνάρτηση ως προς την επίδραση της γεωμετρίας των σημείων στα αποτελέσματα. Η επιλογή της εκάστοτε κατανομής σημείων έγινε με στόχο να εξεταστούν περιπτώσεις που αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως κρίσιμες για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού. Έτσι, στα επόμενα χρησιμοποιούνται σημεία του χώρου σε διαφορετικές αποστάσεις από τις εικόνες (κοντά, μακριά και πολύ μακριά, ώστε να προσομοιαστεί η περίπτωση σημείων του απείρου) αλλά και σημεία που βρίσκονται σε απρόσφορες θέσεις όπως εκείνα που βρίσκονται κοντά στην περιοχή της βάσης του στερεοζεύγους. Επιπλέον, διερευνάται η συμβολή των σφαιρικών εικόνων στην αύξηση της ακρίβειας επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού σε σύγκριση με την χρήση εικόνων μικρότερου γωνιακού ανοίγματος.

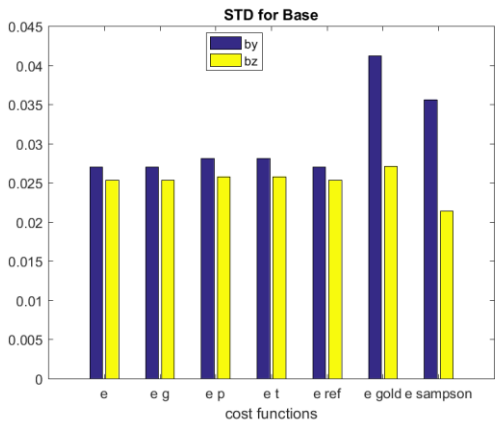
Σε όλα τα παρακάτω πειράματα χρησιμοποιείται το ίδιο επίπεδο θορύβου ώστε να είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκε ένα μέσο επίπεδο θορύβου ίσο με 0.1˚, που αντιστοιχεί σε κάτι λιγότερο από 3 pixel για πανοραμική εικόνα διαστάσεων 10000x5000 pixel. Επίσης για όλα τα πειράματα χρησιμοποιήθηκε μεγάλος αριθμός σημείων (~ 200–300 σημεία ανάλογα και με την περίπτωση), ενώ ο προσανατολισμός της δεξιάς εικόνας ήταν εκείνος που αναφέρθηκε στην ενότητα επίδρασης του θορύβου.

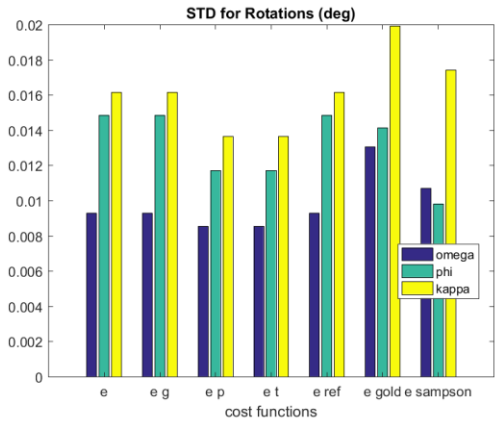
Α. Απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων

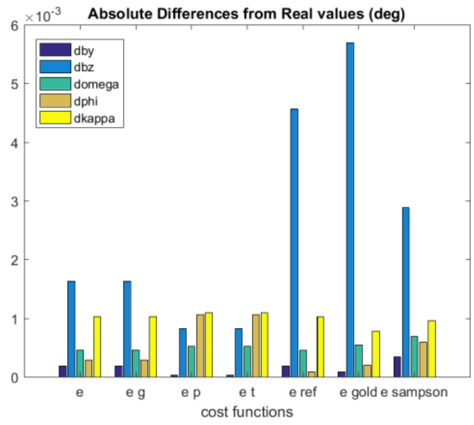
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε «κανονικές» αποστάσεις σε όλες τις διευθύνσεις

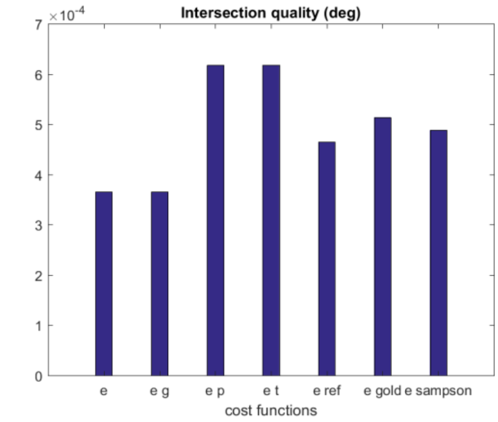
Όπως φαίνεται και από την ονομασία, το συγκεκριμένο πείραμα προσομοιάζει μία τυπική περίπτωση ζεύγους σφαιρικών εικόνων με την έννοια ότι τα σημεία κατανέμονται σε όλες τις διευθύνσεις του χώρου και σε κανονικές αποστάσεις από τα σημεία λήψης. Με τον όρο κανονικές νοούνται αποστάσεις που κυμαίνονται από το διπλάσιο έως το 10πλάσιο του μήκους της βάσης του στερεοζεύγους. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν από 100 σημεία σε αποστάσεις 20, 40 και 60 μονάδες από το μέσο της βάσης του στερεοζεύγους. Έπονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.











Με μία πρώτη ματιά στα διαγράμματα των συνολικών μέτρων ακρίβειας (σ_0 και συνολικό γωνιακό σφάλμα) φαίνεται ότι τα αποτελέσματα των πέντε πρώτων συναρτήσεων είναι παρόμοια, ενώ ελαφρώς χειρότερη εικόνα παρουσιάζουν εκείνα των $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{sampson}}$. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το δεύτερο σφάλμα αποτελεί προσέγγιση του πρώτου, το οποίο όπως προαναφέρθηκε ελαχιστοποιεί μία γεωμετρική ποσότητα που μετρείται στο επίπεδο.

Από το διάγραμμα των σφαλμάτων της βάσης παρατηρείται ότι όλες οι εξισώσεις υπολογίζουν με λίγο χειρότερη ακρίβεια την b_y, όμως ακριβώς αντίστροφη είναι η εικόνα στο διάγραμμα των απόλυτων διαφορών των εκτιμώμενων τιμών από τις πραγματικές, όπου εκεί για όλες τις εξισώσεις υπολογίζεται μεγαλύτερη διαφορά για την b_z. Να σημειωθεί ότι με βάση τον προσανατολισμό που επιλέχθηκε για την δεξιά εικόνα η κατά y συνιστώσα της βάσης είναι μηδενική και πιθανώς οι εν λόγω διαφοροποιήσεις να οφείλονται και σε αυτό.

Από το διάγραμμα των σφαλμάτων των στροφών φαίνεται ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια για τα πέντε πρώτα σφάλματα, όπου η εκτίμηση της ω γίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια, ακολουθεί η της φ και τέλος η της κ όπου εμφανίζεται και το μεγαλύτερο σφάλμα σε όλες τις εξισώσεις. Με δεδομένη την γεωμετρία των σφαιρικών εικόνων, θα περίμενε κανείς η ακρίβεια των στροφών να είναι παρόμοια για όλες καθώς λόγω της κάλυψης του χώρου προς όλες τις διευθύνσεις όλες οι στροφές επιδρούν το ίδιο. Με βάση το παραπάνω, οι υπολογιζόμενες διαφορές πιθανώς οφείλονται στις αρχικές διαφορές των τιμών των στροφών σε συνδυασμό με τις διαφορετικές τιμές των συνιστωσών της βάσης. Το επιχείρημα αυτό ενισχύεται και από το γεγονός ότι η σχετική ακρίβεια μεταξύ των παραμέτρων του προσανατολισμού είναι παρόμοια για όλες τις εξισώσεις σφάλματος.

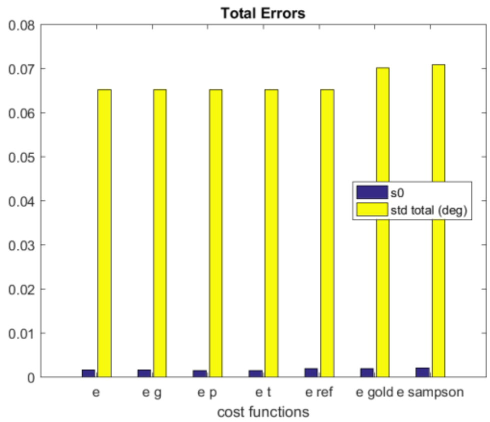
Σε απόλυτους αριθμούς, παρατηρείται ότι η ακρίβεια εκτίμησης των στροφών είναι κατά τι καλύτερη για όλες τις εξισώσεις από την ακρίβεια εκτίμησης της βάσης. Το ίδιο προκύπτει και από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών, γεγονός που σημαίνει ότι η χρήση σφαιρικών εικόνων ενισχύει την ακρίβεια εκτίμησης των στροφών. Αν και οι διαφορές της ακρίβειας των εξισώσεων είναι μικρές, από το σύνολο των διαγραμμάτων που αφορούν τις παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού καταλληλότερες φαίνεται να είναι και πάλι οι $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$.

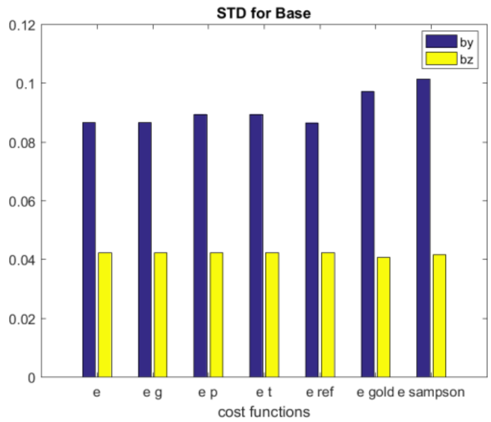
Τέλος, όσον αφορά την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται σε σχέση με παραπάνω. Συγκεκριμένα, με βάση αυτό το κριτήριο τα $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ έχουν την μεγαλύτερη αβεβαιότητα και ως καλύτερες εξισώσεις εμφανίζονται τα $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_g}$. Τέλος, υψηλότερη ακρίβεια σε σχέση με τα προηγούμενα κριτήρια αξιολόγησης έχουν τα $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$, το οποίο είναι λογικό καθώς ο υπολογισμός του $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ εμπλέκει τον τριγωνισμό των σημείων. Η ακρίβεια της εμπροσθοτομίας έχει σημασία καθώς συχνά αποτελεί το τελικό ζητούμενο σε πολλές πραγματικές εφαρμογές. Η ακρίβεια που υπολογίζεται για κάθε εξίσωση μεν είναι διαφορετική αλλά οι διαφορές αυτές είναι αριθμητικά πολύ μικρές (<0.0003˚). Τέλος, ο υπολογισμός της ακρίβειας της εμπροσθοτομίας προφανώς ενσωματώνει πλήρως και τις συσχετίσεις μεταξύ των αγνώστων του σχετικού προσανατολισμού που υπολογίζονται για κάθε εξίσωση και υπό αυτήν την έννοια αποτελεί ένα επιπλέον μέτρο για την συνολική ακρίβεια της κάθε μίας.

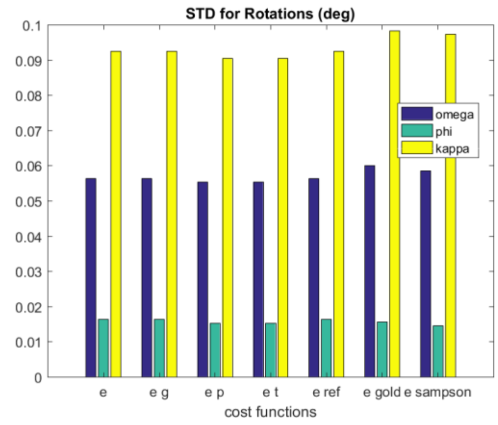
Β. Απλή περίπτωση συμβατικών εικόνων

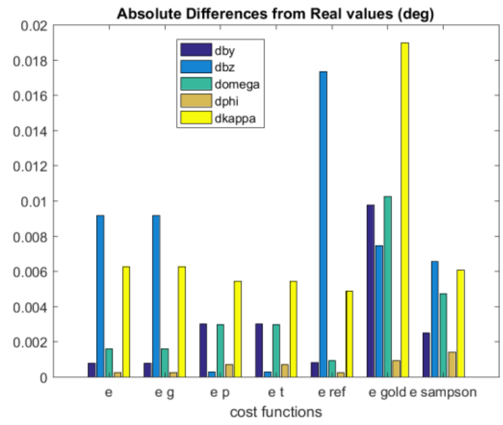
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε «κανονικές» αποστάσεις μπροστά από τις εικόνες

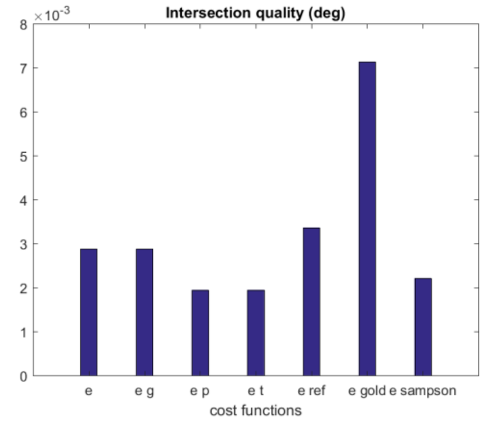
Το δεύτερο πείραμα αποσκοπεί στην σύγκριση μεταξύ σφαιρικών και συμβατικών εικόνων. Χρησιμοποιούνται οι ίδιες παράμετροι με προηγουμένως με διαφοροποίηση μόνο στην κατανομή των σημείων ως προς το εύρος των διευθύνσεων του χώρου στο οποίο βρίσκονται τα σημεία. Συγκεκριμένα θεωρούνται εικόνες με γωνιακό άνοιγμα περίπου 75x55˚, εύρος που προσεγγίζει μία τυπική συμβατική εικόνα.











Αρχικά παρατηρείται ότι οι επιδόσεις του **ε_{gold}** βελτιώνονται σημαντικά σε σχέση με τα αποτελέσματα του προηγούμενου πειράματος, ενώ και οι τιμές των σφαλμάτων του **ε_{gold}** είναι πλέον συγκρίσιμες με εκείνες των άλλων εξισώσεων. Συνεπώς, επιβεβαιώνεται η καταλληλότητα αυτής της γεωμετρικής ποσότητας για τις συμβατικές εικόνες. Επιπλέον παρατηρείται ότι για όλες τις εξισώσεις σφάλματος, το συνολικό γωνιακό σφάλμα είναι μεγαλύτερο από προηγουμένως και άρα, πράγματι, η χρήση πανοραμικών εικόνων βελτιώνει την ποιότητα λύσης του σχετικού προσανατολισμού.

Αναλυτικότερα, από το διάγραμμα των σφαλμάτων των συνιστωσών της βάσης παρατηρείται ότι και εδώ η b_y έχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα από την b_z, και επιπλέον οι αβεβαιότητες και των δύο συνιστωσών είναι μεγαλύτερες από προηγουμένως (χονδρικά δύο φορές κατώτερη ακρίβεια για την b_z και 4 φορές για την b_y). Από το διάγραμμα των σφαλμάτων των γωνιών στροφής παρατηρείται ότι η σχετική ακρίβεια υπολογισμού τους είναι διαφορετική από την προηγούμενη περίπτωση. Συγκεκριμένα, η ω έχει σημαντικά μεγαλύτερα σφάλματα από την φ (ενώ στην περίπτωση των σφαιρικών τα σφάλματα της ω ήταν τα μικρότερα), τα σφάλματα των ω και κ είναι σημαντικά μεγαλύτερα (5 φορές χειρότερη ακρίβεια σε σύγκριση με την περίπτωση των σφαιρικών), ενώ η ακρίβεια υπολογισμού της φ δεν μεταβάλλεται σημαντικά. Συνεπώς, φαίνεται ότι η σφαιρική γεωμετρία συμβάλλει λιγότερο στην ενίσχυση της ακρίβειας υπολογισμού της φ, γεγονός που είναι λογικό καθώς η συγκεκριμένη γωνία είναι λιγότερο κρίσιμη γεωμετρικά (υπενθυμίζεται ότι, με βάση τον ορισμό του συστήματος αναφοράς που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η φ για την περίπτωση των συμβατικών εικόνων αντιστοιχεί στην στροφή περί τον άξονα λήψης).

Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται ότι οι μεγαλύτερες τιμές αφορούν και πάλι την b_z, ενώ όλες οι υπολογιζόμενες διαφορές είναι αυξημένες κατά μία τάξη μεγέθους. Επίσης παρατηρείται ότι η σχετική διαφορά μεταξύ των συνιστωσών της βάσης είναι πολύ μικρότερη για τον $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$, ενώ ταυτόχρονα η διαφορά μεταξύ πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής της ω είναι πολύ μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες.

Από τους υπολογιζόμενους συντελεστές συσχέτισης, που φαίνονται στην Εικόνα 23, επιβεβαιώνεται ότι στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων η συσχέτιση μεταξύ των άγνωστων παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού είναι υψηλότερη. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι έχει αυξηθεί η συσχέτιση μεταξύ των ω και κ, και κυρίως μεταξύ των δύο συνιστωσών της βάσης με τις στροφές. Οι υψηλότερες τιμές των συντελεστών συσχέτισης επιβεβαιώνουν την αλληλεξάρτηση μεταξύ βάσης και προσανατολισμού, για την οποία έχει γίνει λόγος στα προηγούμενα και αναφέρεται συχνά ως ένα από τα βασικά προβλήματα στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι σφαιρικές εικόνες.

```
# Correlation matrix:
        by     bz     omega  phi    kappa
by      1.000 -0.001 -0.209  0.003  0.264
bz      0.000  1.000 -0.009 -0.255  0.002
omega   0.000  0.000  1.000  0.034 -0.848
phi     0.000  0.000  0.000  1.000 -0.013
kappa   0.000  0.000  0.000  0.000  1.000
```

```
# Correlation matrix:
        by     bz     omega  phi    kappa
by      1.000  0.003 -0.443 -0.157  0.455
bz      0.000  1.000  0.270 -0.177 -0.090
omega   0.000  0.000  1.000 -0.034 -0.978
phi     0.000  0.000  0.000  1.000  0.037
kappa   0.000  0.000  0.000  0.000  1.000
```

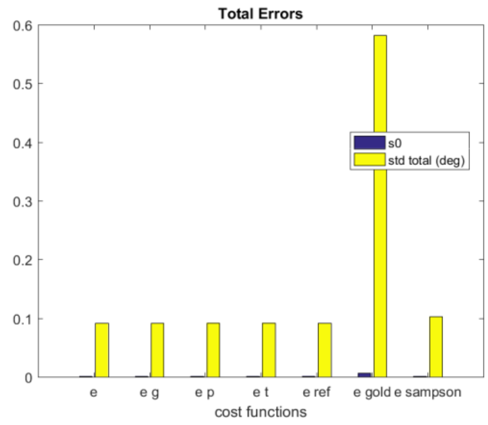
Εικόνα 23: Οι πίνακες συσχέτισης για την απλή περίπτωση σφαιρικών (αριστερά) και συμβατικών εικόνων (δεξιά) για την πρώτη εξίσωση σφάλματος.

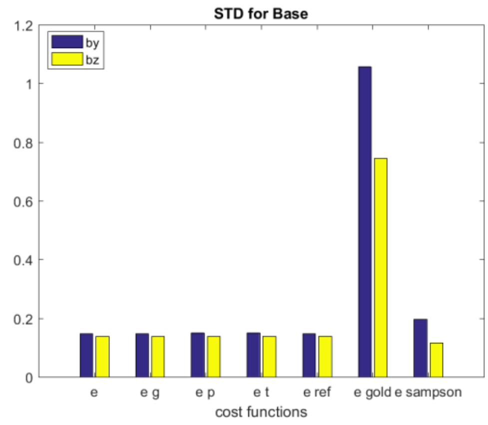
Από το διάγραμμα των σφαλμάτων της εμπροσθοτομίας παρατηρείται επιδείνωση της ακρίβειας κατά μία τάξη μεγέθους περίπου, και παραδόξως η χειρότερη ακρίβεια υπολογίζεται για το $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$. Την βέλτιστη ακρίβεια έχουν οι $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$, και άρα με κριτήριο την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας οι εξισώσεις αυτές δίνουν καλύτερα αποτελέσματα στις συμβατικές εικόνες από ό,τι στις σφαιρικές.

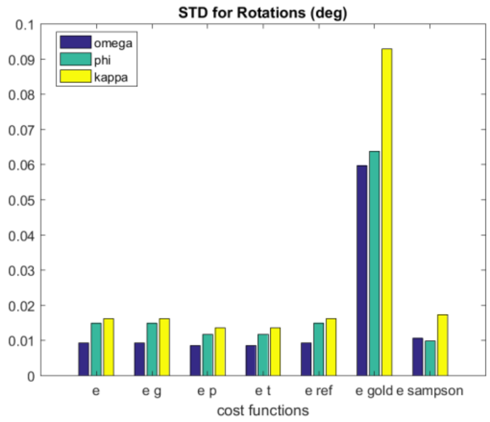
Γ. Περίπτωση σφαιρικών με σημεία σε μεγάλες αποστάσεις

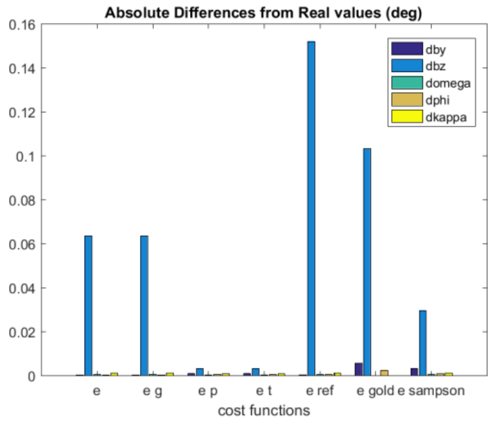
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μεγάλες αποστάσεις σε όλες τις διευθύνσεις

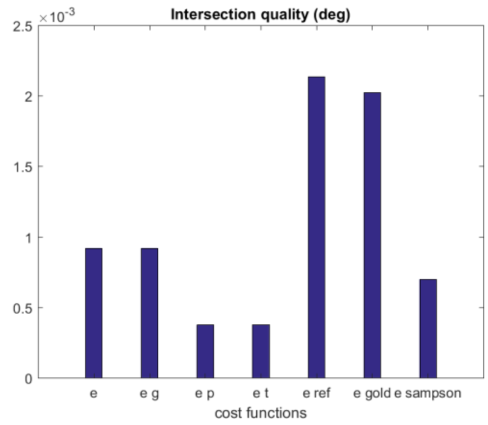
Το πείραμα αυτό έχει στόχο να διερευνήσει τι συμβαίνει στην περίπτωση που τα σημεία κατανέμονται μεν ομοιόμορφα στο χώρο αλλά βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις από τα σημεία λήψης. Μολονότι η συνθήκη συνεπιπεδότητας ισχύει ακόμα και για σημεία στο άπειρο, η μαθηματική της διατύπωση μέσω της συνήθους μορφής της εξίσωσης συνεπιπεδότητας τείνει, όπως έχει ήδη αναφερθεί, να εκφυλιστεί όσο απομακρύνονται τα σημεία (ή ισοδύναμα όσο μικραίνει το διάνυσμα της βάσης). Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκαν από 150 σημεία σε αποστάσεις 150 και 200 μονάδες από το μέσο της βάσης (οι αποστάσεις αυτές αντιστοιχούν χονδρικά σε 20 και 30 φορές το μήκος της βάσης του στερεοζεύγους).











Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι συνολικά υποδεέστερη επίδοση έχει το $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ γεγονός αναμενόμενο καθώς η εξίσωση αυτή εμπλέκει την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας, και άρα η τελική ακρίβεια εξαρτάται και από την επίλυση του τριγωνισμού η οποία είναι λογικό να είναι δυσμενής για μικρές γωνίες αλληλοτομίας. Από την άλλη πλευρά, συνολικά καλύτερη εικόνα παρουσιάζουν οι $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$ με βάση όλα τα μέτρα ακρίβειας. Η βασική υπεροχή αυτών των δύο συναρτήσεων προκύπτει από το διάγραμμα σύγκρισης με τα αληθή δεδομένα όπου σε αντίθεση με τις άλλες εξισώσεις οι δύο αυτές πετυχαίνουν πολύ καλύτερη εκτίμηση και για τις δύο συνιστώσες της βάσης.

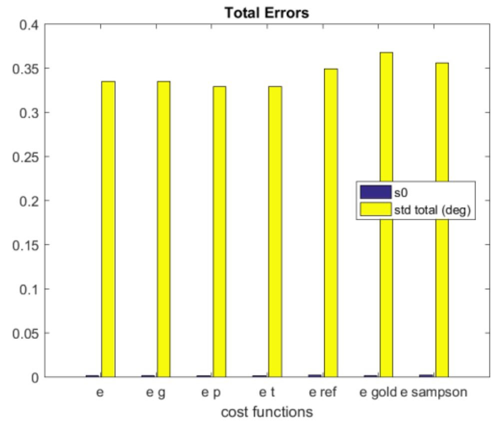
Επιπλέον, οι εξισώσεις αυτές έχουν καλύτερη ακρίβεια και στην επίλυση της εμπροσθοτομίας, αν και θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια όλων των εξισώσεων είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους κατώτερη από ό,τι στην απλή περίπτωση των σφαιρικών εικόνων με σημεία σε κανονικές αποστάσεις.

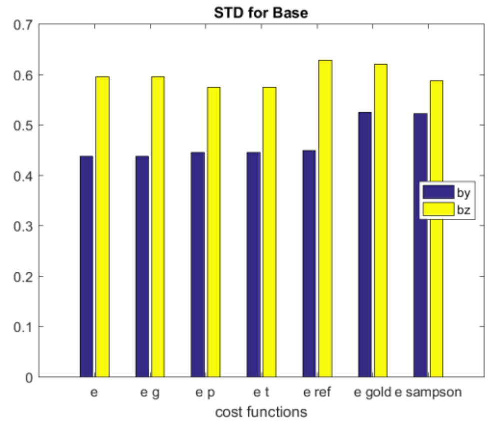
Συγκρίνοντας την συνολική εικόνα αυτής της περίπτωσης με την περίπτωση Α (σφαιρικές εικόνες και σημεία σε κανονικές αποστάσεις), παρατηρεί κανείς ότι εδώ τα υπολογιζόμενα συνολικά γωνιακά σφάλματα είναι περίπου 5 φορές χειρότερα για όλες τις εξισώσεις (πλην του gold, στο οποίο έγινε ξεχωριστή αναφορά παραπάνω). Επιπλέον, όμως, παρατηρείται ότι αυτή η επιδείνωση της ακρίβειας οφείλεται κυρίως στην ακρίβεια υπολογισμού της βάσης και όχι των στροφών, καθώς από το διάγραμμα των σφαλμάτων των στροφών φαίνεται ότι οι τιμές είναι παρόμοιες με εκείνες της περίπτωσης Α. Αντίθετα, η ακρίβεια υπολογισμού των συνιστωσών της βάσης είναι μία τάξη μεγέθους κατώτερη. Άρα επιβεβαιώνεται ότι η χρήση απομακρυσμένων σημείων επηρεάζει την ακρίβεια εκτίμησης της βάσης και όχι των στροφών. Από αυτήν την σκοπιά αποκτούν «νόημα» και οι προσπάθειες που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία και στοχεύουν στην διαφοροποίηση του τρόπου εκτίμησης στροφών από την βάση.

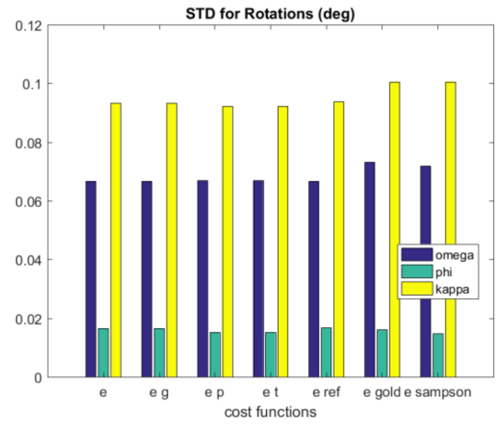
Δ. Περίπτωση συμβατικών εικόνων με σημεία σε μεγάλες αποστάσεις

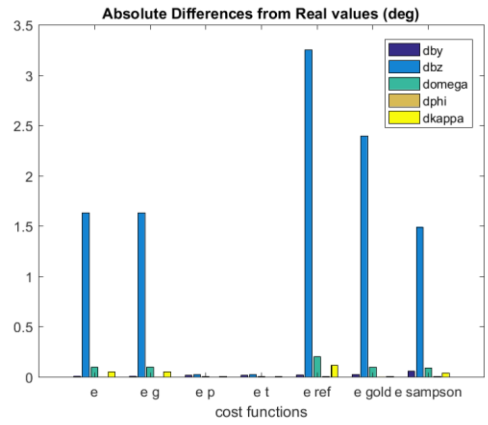
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μεγάλες αποστάσεις μπροστά από τις εικόνες

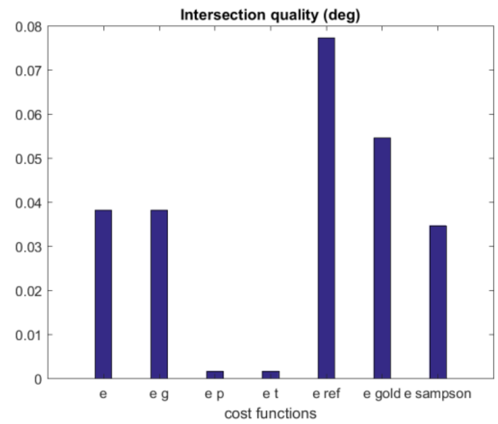
Το πείραμα υλοποιήθηκε ώστε να αξιολογηθεί η επίδραση των απομακρυσμένων σημείων στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού ζεύγους συμβατικών εικόνων σε σύγκριση με τα παραπάνω αποτελέσματα. Ο στόχος είναι δηλαδή να διερευνηθεί εάν η χρήση των σφαιρικών εικόνων επιτρέπει την καλύτερη διαχείριση απομακρυσμένων σημείων σε σύγκριση με την περίπτωση των συμβατικών εικόνων. Για την δημιουργία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν αποστάσεις όμοιες με την περίπτωση Γ (περίπτωση σφαιρικών και μακρινά σημεία) και γωνιακό άνοιγμα όμοιο με εκείνο της περίπτωσης Β (απλή περίπτωση συμβατικών εικόνων).











Αρχικά παρατηρείται ότι και στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση Β, τα αποτελέσματα του $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ είναι συγκρίσιμα με εκείνα των υπόλοιπων εξισώσεων, επιβεβαιώνοντας και πάλι ότι θα πρέπει να γίνεται χρήση της συγκεκριμένης εξίσωσης όταν οι εικόνες είναι συμβατικές.

Συγκρίνοντας με την προηγούμενη περίπτωση (σφαιρικές εικόνες και απομακρυσμένα σημεία), παρατηρεί κανείς ότι η συνολική ακρίβεια είναι περίπου 3 φορές χειρότερη. Η επιδείνωση αυτή όμως στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων δεν οφείλεται κυρίως ή αποκλειστικά στην αύξηση των σφαλμάτων της βάσης αλλά και στα σφάλματα των στροφών. Αναλυτικότερα, η ακρίβεια εκτίμησης της βάσης είναι 3 φορές χειρότερη από ό,τι προηγουμένως αλλά και η ακρίβεια των στροφών έχει επιδεινωθεί. Αυτό προφανώς επιβεβαιώνει για άλλη μία φορά ότι οι σφαιρικές εικόνες συμβάλλουν στην καλύτερη εκτίμηση των στροφών ανεξάρτητα από το εάν τα χρησιμοποιούμενα σημεία είναι σε κανονικές ή δυσμενέστερες αποστάσεις.

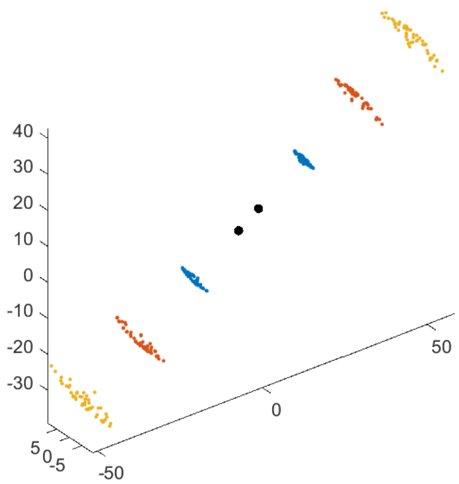
Όπως και στα προηγούμενα, έτσι και εδώ παρατηρείται ότι οι $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$ είναι ανώτερες εξισώσεις με βάση τα μέτρα ακρίβειας της βάσης και των στροφών, αλλά κυρίως με κριτήρια τις διαφορές των εκτιμώμενων τιμών από τις πραγματικές όσο και την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας. Επιπλέον, έχοντας ολοκληρώσει τα τέσσερα πρώτα πειράματα μπορεί πλέον να υποστηρίξει κανείς ότι οι δύο αυτές εξισώσεις δεν παρουσιάζουν ευαισθησία στις τιμές των παραμέτρων του προσανατολισμού καθώς οι υπολογιζόμενες διαφορές για τις συνιστώσες τις βάσης σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν είναι παραπλήσιες (σε αντίθεση με την εικόνα που παρουσιάζουν οι άλλες εξισώσεις όπου οι διαφορές για την b_z είναι σημαντικά μεγαλύτερες από εκείνες που υπολογίζονται για την b_y). Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{reform}}$

συστηματικά παρουσιάζει μεγάλες διαφορές μεταξύ της εκτιμώμενης και της πραγματικής τιμής για την b_z, το οποίο πιθανώς συνδέεται με τις τιμές του προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας και της ποσότητας που ελαχιστοποιείται κατά την επίλυση και αντιστοιχεί στο μέτρο του εξωτερικού γινομένου των κάθετων διανυσμάτων δύο επιπολικών επίπεδων.

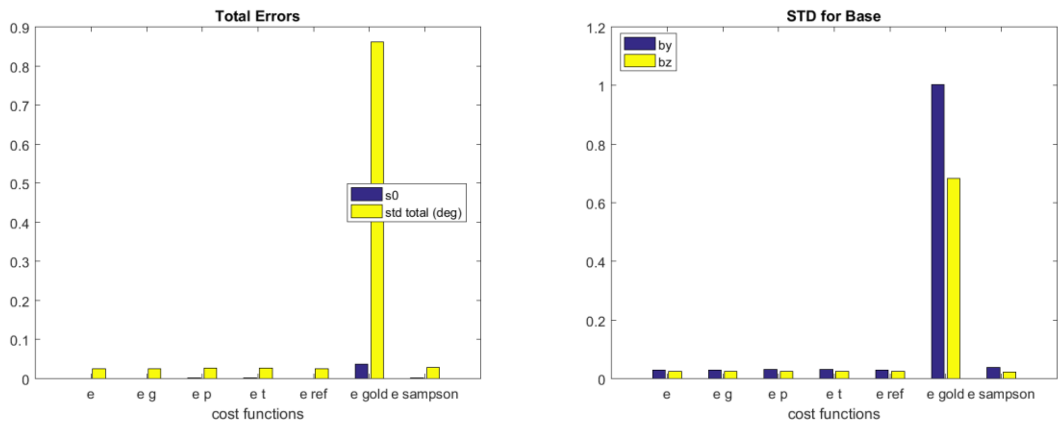
Ε1.Περίπτωση σφαιρικών εικόνων και σημεία στην περιοχή της βάσης

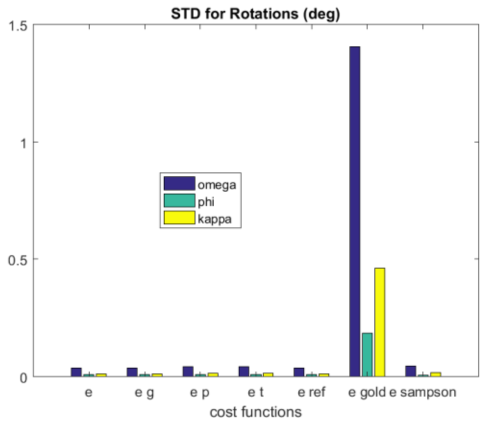
«Κανονικές» αποστάσεις και σημεία σε εύρος 20x20° από τους πόλους

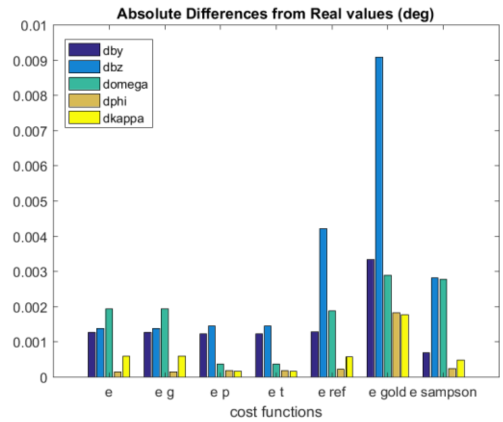
Η περίπτωση αυτή, όπως και οι επόμενες δύο που ακολουθούν (Ε2 και Ε3), αφορούν σε μία κρίσιμη περίπτωση που συναντάται συχνότερα στις σφαιρκές εικόνων και σπανιότερα στις συμβατικές. Στόχος είναι να διερευνηθεί η καταλληλότητα κάθε μίας συνάρτησης για χρήση σημείων κοντά στους πόλους του στερεοζεύγους. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν σημεία σε κανονικές αποστάσεις (όμοιες με εκείνες των περιπτώσεων Α και Β) που κατανέμονταν σε εύρος ±10˚ από τους πόλους του στερεζεύγους (Εικόνα 24).

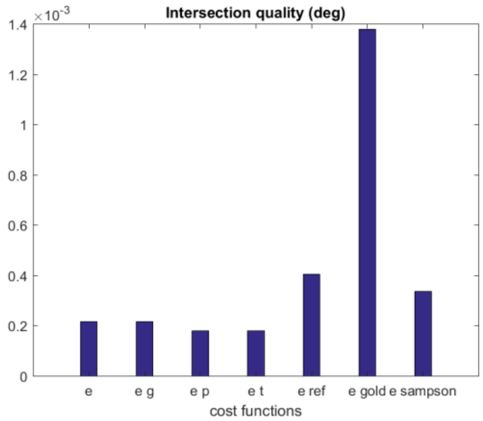


Εικόνα 24: Η χρησιμοποιούμενη κατανομή σημείων στην περίπτωση Ε1.









Η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ παρουσιάζει και εδώ την μικρότερη ακρίβεια, γεγονός λογικό και αναμενόμενο καθώς η επίλυση της εμπροσθοτομίας για σημεία στην κοντά στην ευθεία της βάσης είναι εξαιρετικά δυσμενής ή και αδύνατη. Επιπλέον, παρατηρείται ότι το $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$ συνεχίζει να παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερες διαφορές από ό,τι οι άλλες εξισώσεις στην διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης και πραγματικής τιμής της b_z, ενώ ταυτόχρονα οι υπολογιζόμενες διαφορές μεταξύ των διαφορών για τις δύο συνιστώσες έχουν αμβλυνθεί για όλες τις άλλες εξισώσεις (πλην της $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ για την οποία έγινε ξεχωριστή αναφορά παραπάνω).

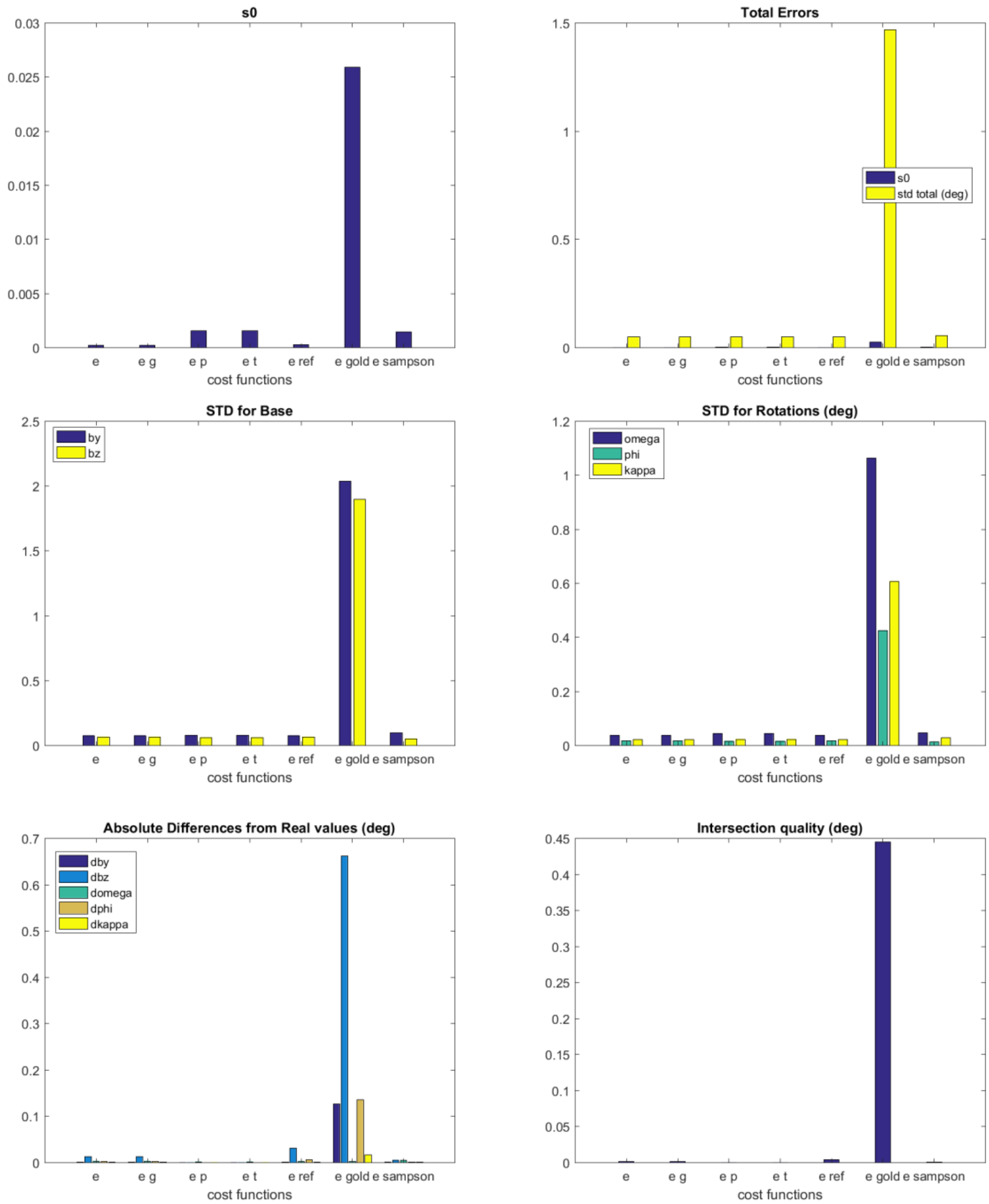
Από όλα τα διαγράμματα φαίνεται ότι οι υπόλοιπες εξισώσεις (πλην της $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$) είναι συγκρίσιμες μεταξύ τους, ενώ ελαφρώς χειρότερη εικόνα παρουσιάζουν οι $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$. Αναλυτικότερα, από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται ότι οι $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{g}}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$ καταλήγουν σε μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης τιμής της ω από την πραγματική, κάτι που δεν ισχύει και για τις εξισώσεις $\boldsymbol{\varepsilon_{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{t}}$. Συνεπώς και σε αυτήν την περίπτωση ως καλύτερες εξισώσεις αναδεικνύονται οι $\boldsymbol{\varepsilon_{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{t}}$.

Τέλος, σε απόλυτους αριθμούς και σε σύγκριση με την απλή περίπτωση των σφαιρικών εικόνων (περίπτωση Α) τα σφάλματα εκτίμησης της βάσης δεν μεταβάλλονται σημαντικά, αλλά αντίθετα η ακρίβεια εκτίμησης της ω επιδεινώνεται αρκετά. Το τελευταίο προφανώς συνδέεται με το ότι τα σημεία κατανέμονται στην περιοχή της βάσης και ότι η ω είναι η στροφή περί τον άξονα Χ. Τέλος, όσον αφορά την άμβλυνση των απόλυτων διαφορών μεταξύ b_y και b_z θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα αυτή οφείλεται σε δυσμενέστερη εκτίμηση της b_y και όχι σε βελτίωση της b_z. Άρα, αν και οι τυπικές αποκλίσεις της βάσης δεν φαίνεται να έχουν μεταβληθεί, η σύγκριση με τα αληθή δεδομένα δείχνει ότι η χρήση σημείων που βρίσκονται στην περιοχή της βάσης επιδρά αρνητικά στην εκτίμησή της.

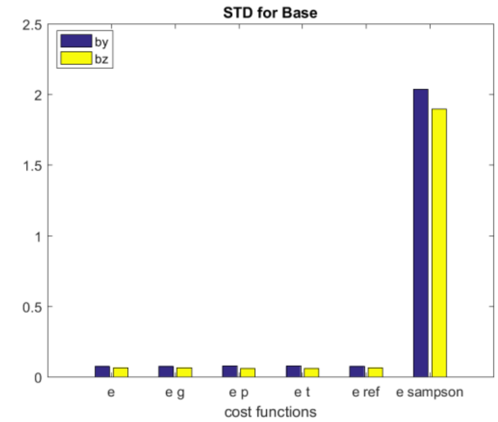
Ε2.Περίπτωση σφαιρικών εικόνων και σημεία στην περιοχή της βάσης μόνο από τη μία πλευρά

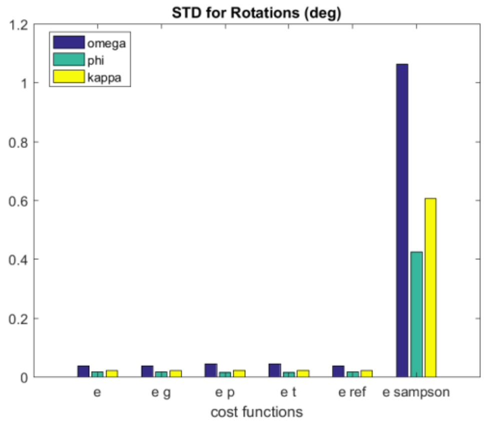
Σημεία στην περιοχή της αριστερής εικόνας

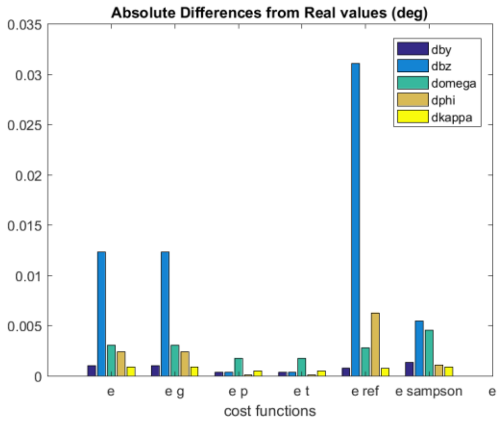
Στην περίπτωση αυτή εξετάζεται και πάλι η κρίσιμη γεωμετρία κατανομής σημείων κοντά στους πόλους, μόνο που τώρα τα σημεία κατανέμονται σε εύρος ±10˚ από τον εξωτερικό πόλο της αριστερής εικόνας.

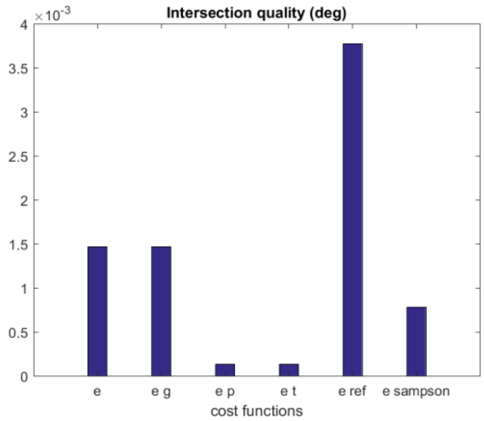


Με την πρώτη ματιά όλα τα αποτελέσματα φαίνονται λίγο χειρότερα για όλες τις εξισώσεις σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση (E1) όπου τα σημεία βρίσκονταν και από τις δύο πλευρές (υπολογιζόμενες διαφορές για όλα τα μέτρα ακρίβειας της τάξης ~0.01˚). Επιπλέον, μεγαλύτερη επιδείνωση παρατηρείται στις ακρίβειες εκτίμησης των συνιστωσών της βάσης και μικρότερη στις ακρίβειες εκτίμησης των στροφών. Ωστόσο οι πολύ υψηλές τιμές σφαλμάτων που υπολογίζονται για την εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ καθιστούν τα διαγράμματα δυσανάγνωστα, και για το λόγο αυτό ακολούθως παρουσιάζονται αυτά χωρίς να συμπεριλαμβάνεται η εν λόγω εξίσωση.







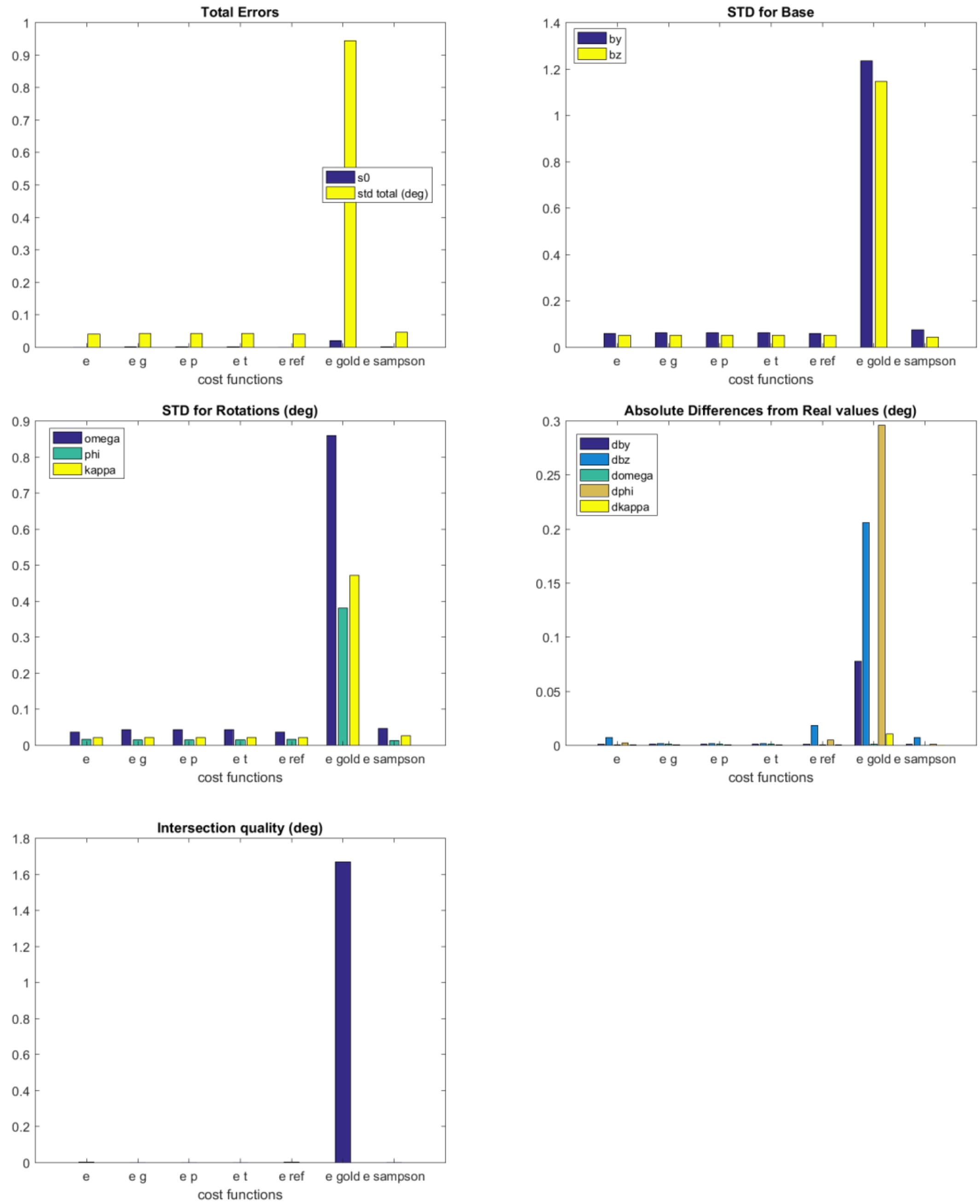


Με την αφαίρεση του $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$, από τα γραφήματα φαίνεται ότι η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{sampson}}$ οδηγεί σε χαμηλότερη ακρίβεια εκτίμησης της βάσης και των στροφών σε σύγκριση με τις υπόλοιπες συναρτήσεις κόστους. Από την άλλη πλευρά, εξετάζοντας το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών δεν έχει κανείς την ίδια εικόνα καθώς εκεί φαίνεται ότι η συγκεκριμένη εξίσωση πετυχαίνει να εκτιμήσει καλύτερα τις πραγματικές τιμές των αγνώστων. Σε κάθε περίπτωση, λαμβανομένων υπόψη όλων των μέτρων ακρίβειας, συνολικά καλύτερη εικόνα έχουν και πάλι οι $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$, μολονότι για αυτές τις εξισώσεις υπολογίζονται οι υψηλότερες τιμές σ_0.

Ε3. Περίπτωση σφαιρικών εικόνων και σημεία στην περιοχή της βάσης μόνο από τη μία πλευρά

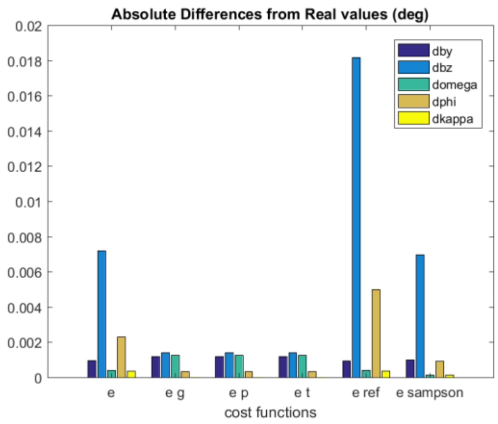
Σημεία στην περιοχή της δεξιάς εικόνας

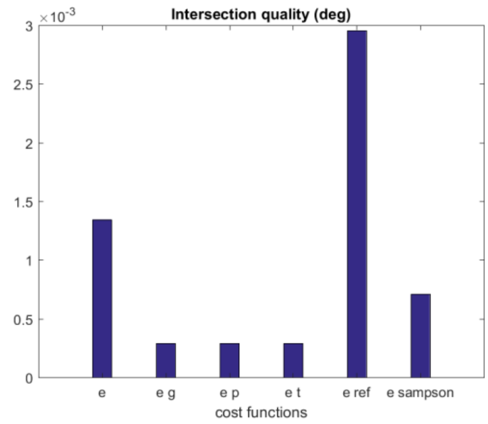
Στην περίπτωση αυτή εξετάζεται και πάλι η κρίσιμη γεωμετρία κατανομής σημείων κοντά στους πόλους, μόνο που αυτή την φορά τα σημεία κατανέμονται σε εύρος ±10° από τον εξωτερικό πόλο της δεξιάς εικόνας.



Από τα παραπάνω γραφήματα όσο και από τα αναλυτικά αριθμητικά αποτελέσματα κάθε εξίσωσης φαίνεται ότι η σχετική εικόνα των εξισώσεων είναι παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση αν και σε απόλυτους αριθμούς η τελική ακρίβεια έχει αυξηθεί.

Από τα παρακάτω διαγράμματα, όπου και πάλι δεν συμπεριλαμβάνεται η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ για λόγους ευκρίνειας, φαίνεται ότι οι υπολογιζόμενες διαφορές μεταξύ εκτιμώμενων και πραγματικών τιμών για όλους τους αγνώστους και όλες τις εξισώσεις έχουν μειωθεί περίπου στο μισό σε σχέση με την περίπτωση E2. Με βάση αυτό, προκύπτει το συμπέρασμα ότι όταν τα σημεία βρίσκονται στην περιοχή του πόλου της σταθερής εικόνας, ο υπολογισμός των παραμέτρων του προσανατολισμού της άλλης εικόνας ως προς αυτήν είναι δυσχερέστερος.



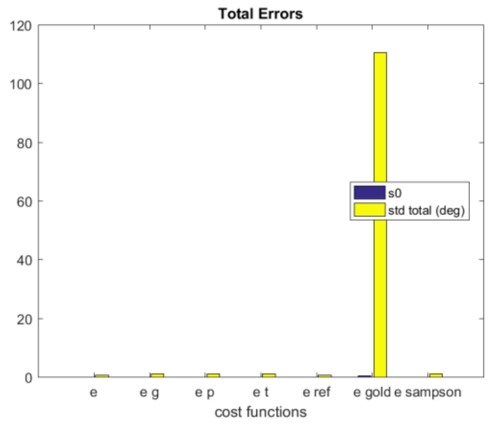


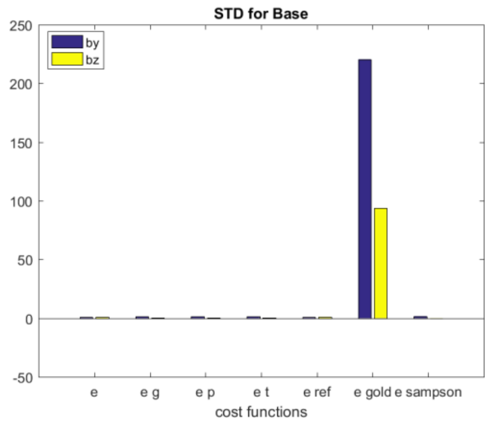
Αυτό το εύρημα είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι όταν τα σημεία είναι πιο κοντά στην δεξιά εικόνα τότε ορίζεται μία δέσμη ακτίνων από την αριστερή που συγκλίνει προς την δεξιά. Έτσι η επίλυση του προσανατολισμού συνιστά ένα πρόβλημα «παρεμβολής» κατά το οποίο η δεξιά εικόνα καλείται να ενταχθεί σε ένα σύνολο συγκλινουσών ακτίνων, πράγμα το οποίο προφανώς είναι ευκολότερο από την αντίθετη περίπτωση όπου η δεξιά εικόνα θα έπρεπε να ενταχθεί σε μια δέσμη ακτίνων που θα οριζόταν από την αριστερή εικόνα συγκλίνοντας σε αυτήν και άρα αποκλίνοντας από την δεξιά. Άρα, είναι ερμηνεύσιμο που η περίπτωση E2 αντιπροσωπεύει πιο δυσμενή γεωμετρία.

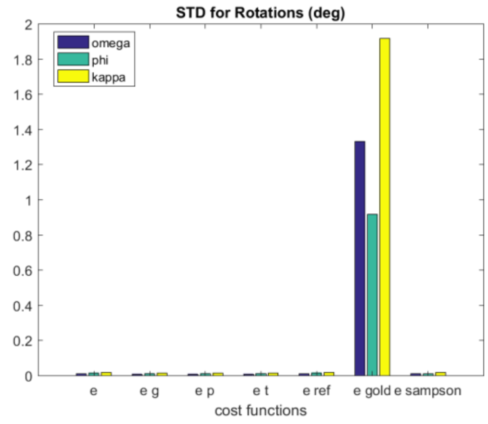
ΣΤ. Περίπτωση σφαιρικών εικόνων και σημεία στο άπειρο

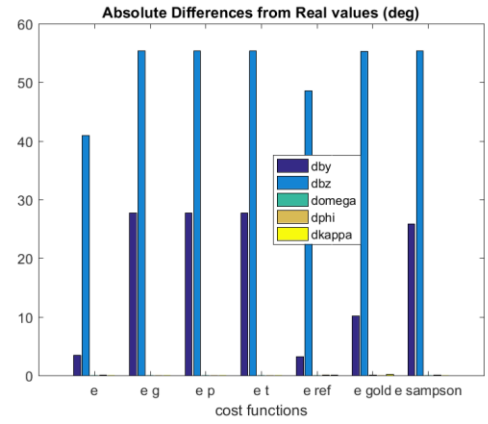
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλες τις διευθύνσεις σε πολύ μεγάλες αποστάσεις

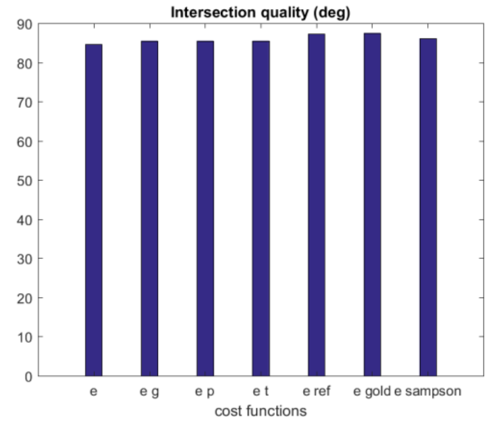
Στα προηγούμενα αξιολογήθηκε η περίπτωση όπου τα σημεία κατανέμονταν ομοιόμορφα στο χώρο αλλά βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις από τα σημεία λήψης. Εδώ οι αποστάσεις των σημείων αυξάνονται ακόμα περισσότερο ώστε για το δεδομένο μήκος της βάσης του στερεοζεύγους τα σημεία να βρίσκονται πρακτικά στο άπειρο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν από 150 σημεία σε αποστάσεις 1000 και 1500 μονάδες από το μέσο της βάσης (οι αποστάσεις αυτές αντιστοιχούν χονδρικά σε 150 και 200 φορές το μήκος της βάσης).





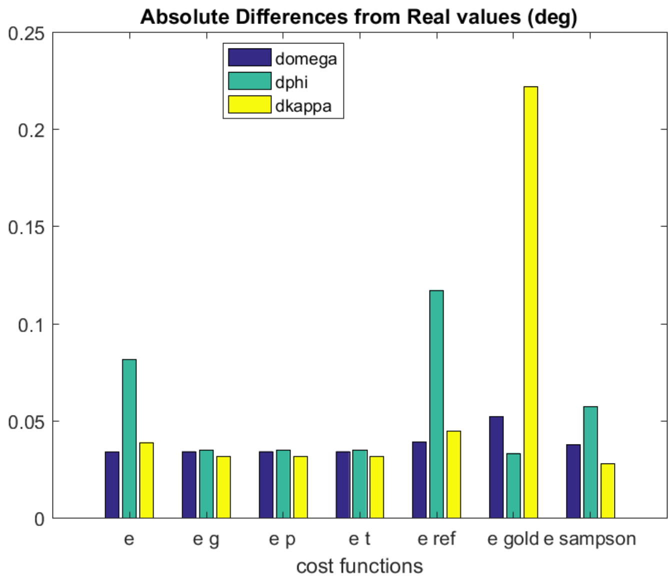






Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{gold}}$ αποτυγχάνει να λύσει το πρόβλημα καθώς οι τιμές για όλα τα μέτρα ακρίβειας είναι εκτός των επιτρεπτών ορίων (ενδεικτικά αναφέρεται ότι το συνολικό γωνιακό σφάλμα για την συγκεκριμένη εξίσωση υπολογίστηκε περίπου ίσο με 110˚). Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται ότι μολονότι οι υπολογιζόμενες τυπικές αποκλίσεις για τις συνιστώσες της βάσης για όλες τις εξισώσεις είναι μικρές, οι εκτιμώμενες τιμές της b_z διαφέρουν από τις πραγματικές περισσότερο από 50˚ για τις 5 από τις επτά εξισώσεις. Από την άλλη πλευρά αξίζει να σημειωθεί ότι οι αντίστοιχες διαφορές που υπολογίζονται για τις στροφές και αφορούν σε αυτές τις 5 εξισώσεις είναι πολύ μικρότερες (τόσο που δεν διακρίνονται στο σχετικό διάγραμμα). Άρα ακόμα και αν αυτές οι συναρτήσεις σφάλματος αδυνατούν να εκτιμήσουν τις συνιστώσες της βάσης όταν τα σημεία είναι στο άπειρο, συνεχίζουν να προσεγγίζουν τις τιμές των στροφών. Αναφορικά με την επίλυση της εμπροσθοτομίας, από το αντίστοιχο διάγραμμα παρατηρείται ότι όλες οι εξισώσεις αποτυγχάνουν με σφάλμα της τάξης των 85˚, το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς σημεία που τείνουν στο άπειρο ορίζουν σχεδόν παράλληλες διευθύνσεις.

Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται επίσης ότι οι **ε** και $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$ επιτυγχάνουν να προσεγγίσουν καλύτερα την b_y σε σύγκριση με τις υπόλοιπες εξισώσεις (απόκλιση περίπου ίση με 3˚) αλλά αποτυγχάνουν και αυτές στην εκτίμηση της b_z. Έτσι το ενδιαφέρον επικεντρώνεται αποκλειστικά και μόνο στην εκτίμηση των στροφών και για το λόγο αυτό στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζονται μόνο οι απόλυτες διαφορές εκτιμώμενων και πραγματικών τιμών των άγνωστων στροφών.



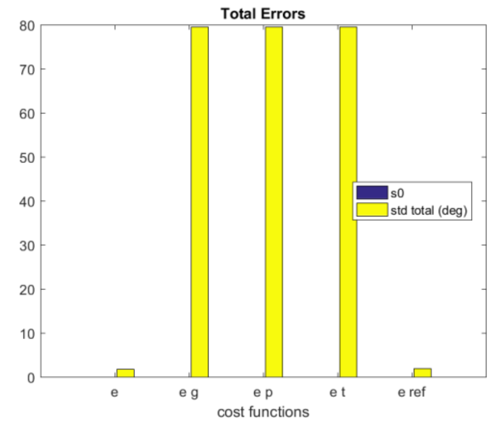
Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ακρίβεια εκτίμησης των στροφών είναι μάλλον αποδεκτή αν και σημαντικά κατώτερη από εκείνη της περίπτωσης Α (απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων). Συγκεκριμένα, στο διάγραμμα φαίνεται ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων η εκτίμηση των στροφών αποκλίνει κατά 0.05˚, ενώ στην περίπτωση Α οι μέγιστες αποκλίσεις ήταν περίπου ίσες με 0.001˚.

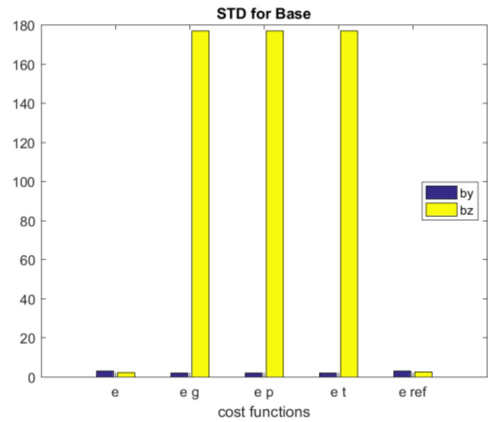
Με βάση τα προηγηθέντα επιβεβαιώνεται ότι η χρήση σημείων του απείρου καθιστά αδύνατη την εκτίμηση της βάσης αλλά επιτρέπει την εκτίμηση των στροφών.

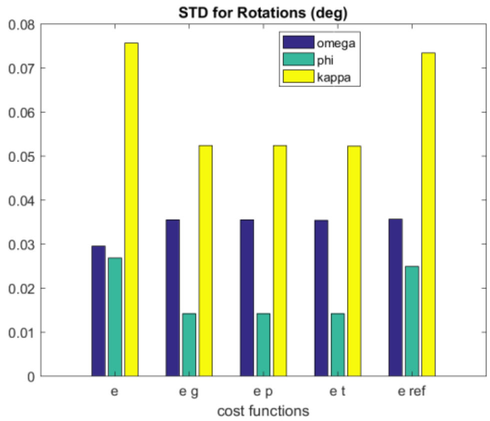
Ζ. Περίπτωση συμβατικών εικόνων και σημεία στο άπειρο

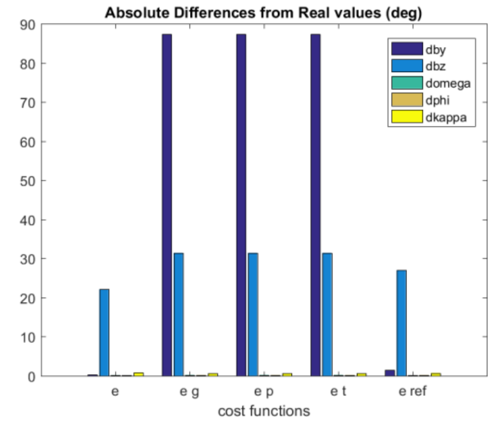
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα μόνο μπροστά από τις εικόνες σε πολύ μεγάλες αποστάσεις

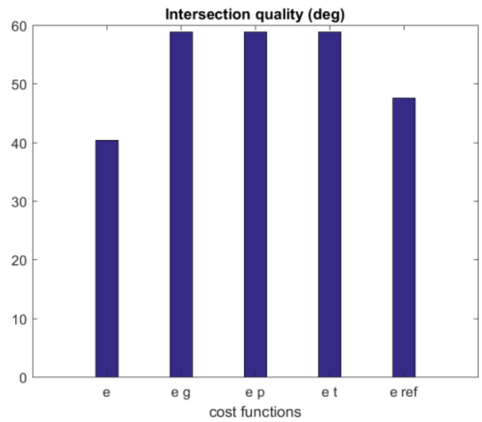
Για την κατανομή των σημείων χρησιμοποιήθηκε εδώ γωνιακό άνοιγμα αντίστοιχο με εκείνο της περίπτωση Β (απλή περίπτωση συμβατικών εικόνων) και αποστάσεις σημείων ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση. Στα ακόλουθα διαγράμματα δεν έχουν συμπεριληφθεί οι εξισώσεις $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$ καθώς και για τις δύο τα υπολογιζόμενα συνολικά γωνιακά σφάλματα ήταν μεγαλύτερα της τάξης του 10^8.



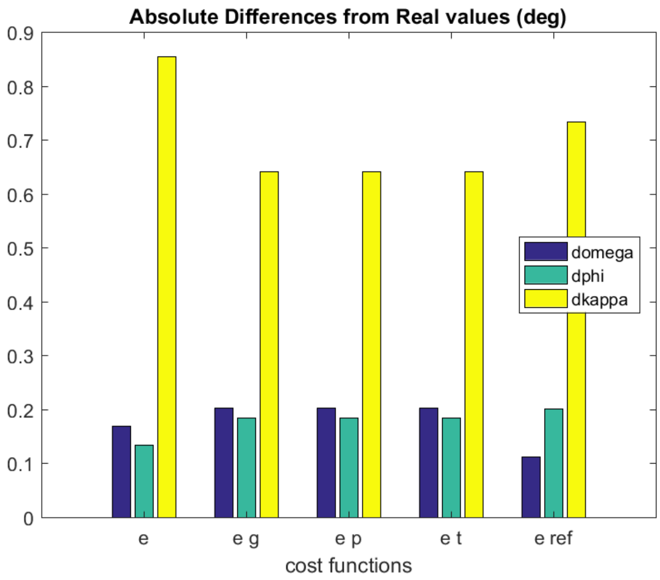








Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι προφανές ότι και στην περίπτωση αυτή η εκτίμηση της βάσης καθίσταται πρακτικά αδύνατη, αν και οι **ε** και **ε_{reform}** καταφέρνουν και πάλι να προσεγγίσουν την b_y με απόκλιση λίγων μοιρών (υπενθυμίζεται ότι η κατά y συνιστώσα της βάσης έχει μηδενική τιμή). Επιπλέον φαίνεται ότι ούτε η επίλυση της εμπροσθοτομίας οδηγεί σε ικανοποιητικό αποτέλεσμα, οπότε το ενδιαφέρον επικεντρώνεται και πάλι στην εκτίμηση των στροφών μόνο. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται μόνο οι απόλυτες διαφορές των εκτιμώμενων και πραγματικών τιμών των άγνωστων στροφών για τις πέντε εξισώσεις.

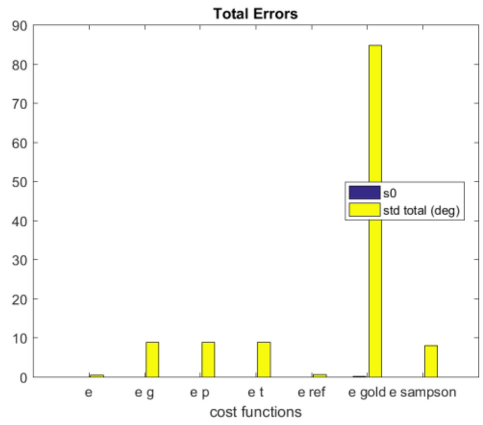


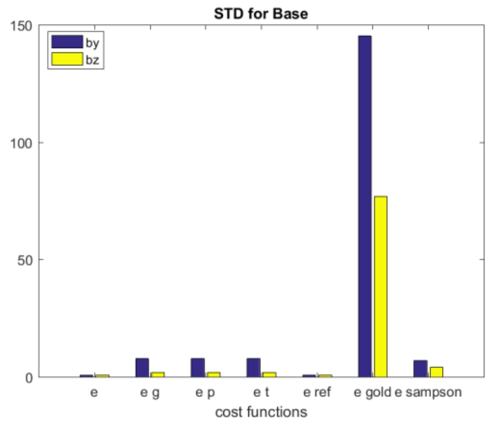
Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι όλες οι εξισώσεις καταλήγουν σε χειρότερη εκτίμηση των στροφών σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση (σφαιρικές εικόνες και σημεία στο άπειρο). Επιπλέον, οι αποκλίσεις για την στροφή κ είναι αισθητά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες που υπολογίζονται για τις άλλες δύο στροφές. Επομένως ένα πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η χρήση σημείων του απείρου σε συνδυασμό με το περιορισμένο οπτικό πεδίο των εικόνων επιτρέπει μεν και πάλι την εκτίμηση των στροφών, αλλά με υποδεέστερη ακρίβεια από εκείνη που επιτυγχάνεται με σημεία κατανεμημένα σε όλες τις διευθύνσεις του χώρου. Επίσης, συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με εκείνα της απλής περίπτωση συμβατικών εικόνων (περίπτωση Β) παρατηρεί κανείς ότι και στις δύο περιπτώσεις οι εκτιμώμενες τιμές για την γωνία κ αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές σε σύγκριση με τις αποκλίσεις που υπολογίζονται για τις άλλες δύο στροφές. Σε απόλυτους αριθμούς οι αποκλίσεις αυτής της περίπτωσης είναι δύο τάξεις μεγέθους χειρότερες από τις αντίστοιχες της περίπτωσης Β. Άρα και εδώ η χρήση σημείων του απείρου επιδεινώνει την ακρίβεια εκτίμησης των στροφών, και μάλιστα η επιδείνωση είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων.

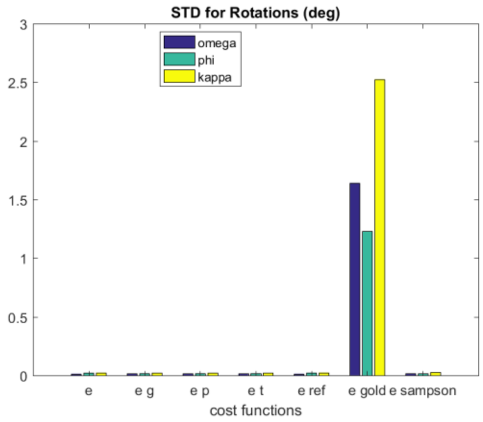
Η. Περίπτωση σφαιρικών εικόνων, σημεία στο άπειρο και ένα σημείο κοντά

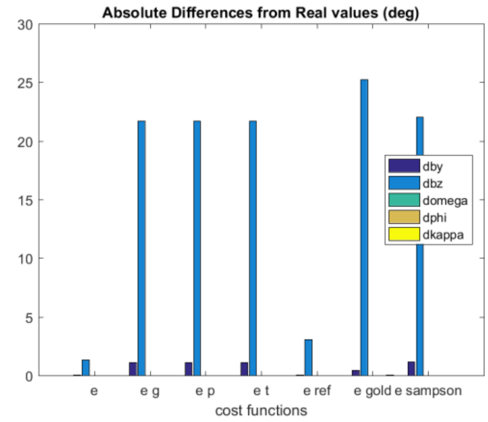
Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλες τις διευθύνσεις σε πολύ μεγάλες αποστάσεις και 1 σημείο κοντά

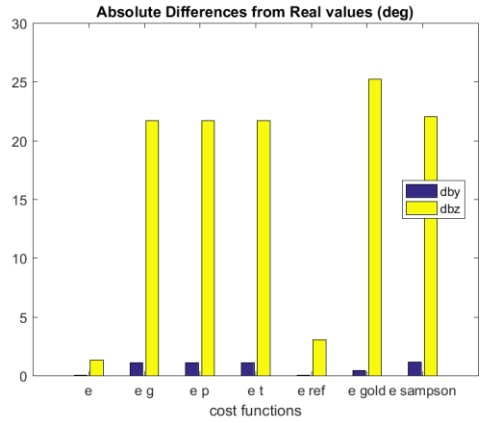
Από τα δύο προηγούμενα πειράματα προέκυψε ότι η χρήση σημείων του απείρου καθιστά αδύνατη την εκτίμηση της βάσης είτε χρησιμοποιούνται σφαιρικές είτε συμβατικές εικόνες. Το πείραμα αυτό υλοποιήθηκε προκειμένου να διερευνηθεί η συμβολή ενός μόνο σημείου σε κοντινή απόσταση από τα σημεία λήψης στην εκτίμηση της βάσης. Έτσι, όλες οι εμπλεκόμενες παράμετροι για την δημιουργία των δεδομένων είναι εδώ ίδιες με εκείνες της περίπτωσης ΣΤ, με μόνη διαφορά ότι έχει προστεθεί ένα σημείο σε απόσταση 40 μονάδων από το μέσο της βάσης.

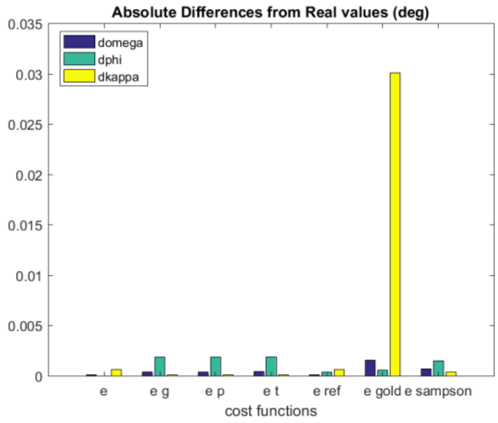

Total Errors
s0
std total (deg)
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions

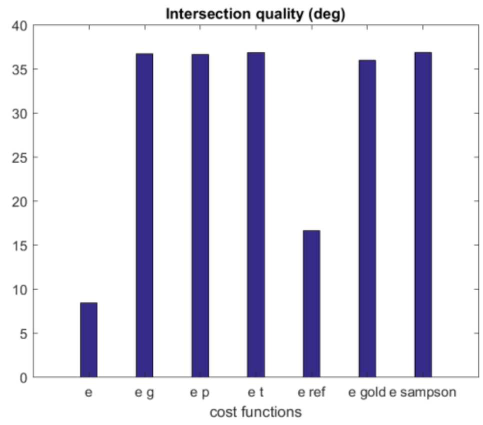

STD for Base
by
bz
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions


STD for Rotations (deg)
omega
phi
kappa
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions


Absolute Differences from Real values (deg)
dby
dbz
domega
dphi
dkappa
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions

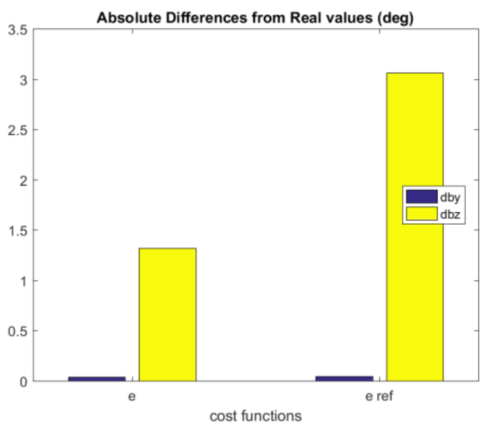

Absolute Differences from Real values (deg)
dby
dbz
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions

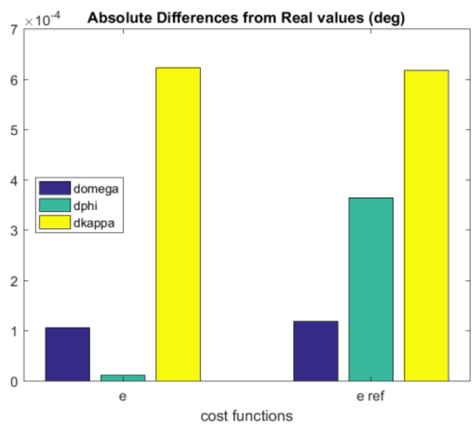

Absolute Differences from Real values (deg)
domega
dphi
dkappa
e
e g
e p
e t
e ref
e gold
e sampson
cost functions



Από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι η εξίσωση **ε_{gold}** και πάλι αποτυγχάνει να λύσει ορθά τον σχετικό προσανατολισμό, και συνεπώς η χρήση σημείων του απείρου είναι απαγορευτική για την συγκεκριμένη εξίσωση σφάλματος.

Αναφορικά με την εκτίμηση της βάσης, που είναι και το βασικό ζητούμενο στην συγκεκριμένη περίπτωση, κατ' αρχάς παρατηρείται ότι η ακρίβεια έχει βελτιωθεί για όλες τις εξισώσεις (πλην της προαναφερθείσας **ε_{gold}**) με βάση την υπολογιζόμενη τυπική απόκλιση για κάθε μία συνιστώσα. Ωστόσο, από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών φαίνεται ότι οι υπολογιζόμενες αποκλίσεις για την b_z αν και έχουν μειωθεί στο μισό (σε σύγκριση με την περίπτωση ΣΤ) συνεχίζουν να είναι πολύ υψηλές για τις τέσσερεις εξισώσεις. Συνεπώς προκύπτει ότι μόνο οι εξισώσεις **ε** και **ε_{reform}** καταφέρνουν να αξιοποιήσουν το σημείο που προστέθηκε στις παρατηρήσεις και να καταλήξουν σε ορθή εκτίμηση της βάσης και των στροφών. Επιπλέον, για τις δύο αυτές εξισώσεις έχουν μειωθεί σημαντικά και τα σφάλματα της εμπροσθοτομίας, γεγονός που οφείλεται στην ορθότερη εκτίμηση της βάσης. Προφανώς η ποιότητα τριγωνισμού των σημείων συνεχίζει να μην είναι ικανοποιητική καθώς, ακόμα και αν η βάση του ζεύγους έχει εκτιμηθεί σωστά, η εύρεση του σημείου τομής δύο οπτικών ακτίνων που καταλήγουν στο άπειρο είναι εξαιρετικά αβέβαιη. Ακολούθως παρουσιάζονται οι διαφορές μεταξύ εκτιμώμενων και πραγματικών τιμών των συνιστωσών της βάσης και των στροφών ξεχωριστά για τις εξισώσεις **ε** και **ε_{reform}**.



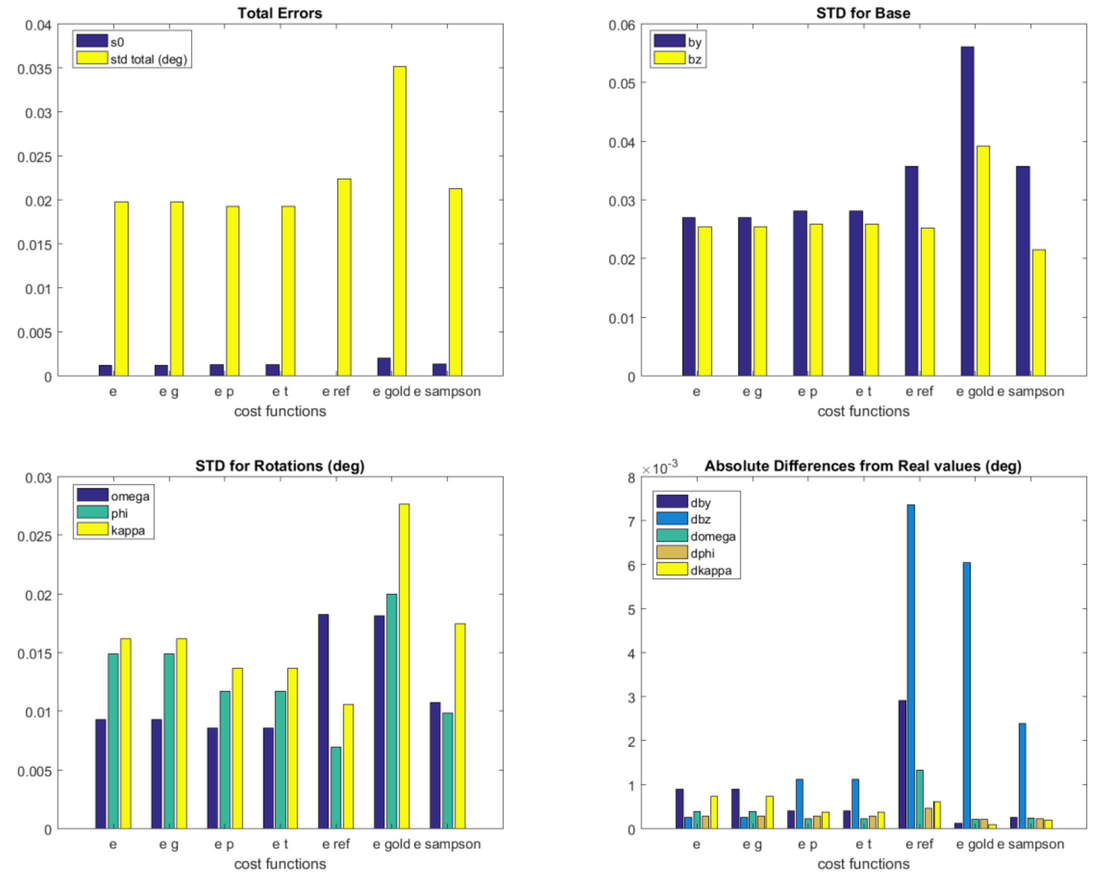


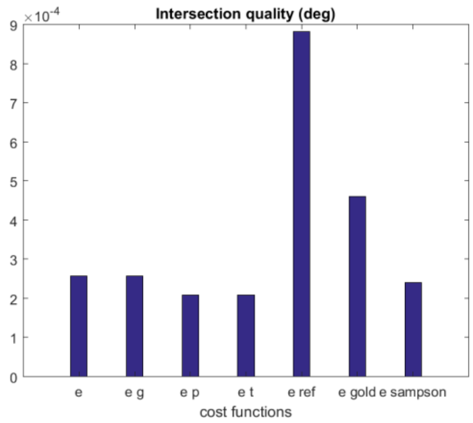
Φαίνεται ότι η εκτίμηση της βάσης έχει βελτιωθεί σημαντικά σε σύγκριση με την περίπτωση ΣΤ καίτοι η συνιστώσα bz εξακολουθεί να αποκλίνει από την πραγματική της τιμή περισσότερο από την b_y. Οι υπολογιζόμενες αποκλίσεις της bz είναι εδώ πολύ μικρότερες και συγκεκριμένα περίπου ίσες με 1.5˚ και 3˚ για τις $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$, αντίστοιχα ενώ οι αποκλίσεις στην περίπτωση ΣΤ για τις δύο αυτές εξισώσεις ξεπερνούσαν τις 40˚. Σχετικά με την ποιότητα εκτίμησης των στροφών παρατηρείται ότι και αυτή έχει βελτιωθεί σημαντικά καθώς η μέγιστη απόκλιση που εμφανίζεται στο παραπάνω διάγραμμα είναι περίπου ίση με 0.0006˚, ενώ η αντίστοιχη απόκλιση στην περίπτωση ΣΤ ήταν περίπου ίση με 0.1˚.

Θ. Αξιολόγηση της συνάρτησης ε_{reform}

Σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όλες τις διευθύνσεις σε «κανονικές» αποστάσεις

Στο Κεφάλαιο 3 διατυπώθηκε η γεωμετρική ερμηνεία και η μαθηματική διατύπωση της συνάρτησης σφάλματος $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$. Σε όλα τα προηγούμενα πειράματα η ποσότητα που ελαχιστοποιούνταν κατά την επίλυση ήταν αυτή της εξίσωσης 3.7 που υπολογίζει το μέτρο ενός διανύσματος. Εδώ υλοποιείται και πάλι το πείραμα της περίπτωσης Α (απλή περίπτωση σφαιρικών) διαφοροποιώντας μόνο το σφάλμα της εξίσωσης $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$. Συγκεκριμένα, αντί της εξίσωσης 3.7 χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση 3.9, η οποία υπολογίζει το σφάλμα μέσω του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Συνεπώς, τα παρακάτω αποτελέσματα αναμένεται να ομοιάζουν με εκείνα της περίπτωσης Α για τις υπόλοιπες 6 εξισώσεις και αντικείμενο διερεύνησης είναι οι τυχόν διαφορές που θα προκύψουν για την εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$.





Πράγματι, στα παραπάνω διαγράμματα δεν εντοπίζονται σημαντικές διαφορές για τις υπόλοιπες εξισώσεις σε κανένα από τα μέτρα ακρίβειας. Αναφορικά με την εξεταζόμενη **ε_{reform}**, παρατηρείται ότι η λύση συγκλίνει ευκολότερα καθώς η τιμή του σ_0 έχει μειωθεί αρκετά. Από την άλλη πλευρά, οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων έχουν μεταβληθεί, και κυρίως έχει αυξηθεί η αβεβαιότητα εκτίμησης της by και της ω, ενώ έχει μειωθεί η αβεβαιότητα εκτίμησης της κ. Τα παραπάνω φαίνονται και από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών όπου η εκτιμώμενη τιμή της b_y διαφέρει αρκετά από την πραγματική. Τέλος, έχει μειωθεί και η ακρίβεια της εμπροσθοτομίας για την συγκεκριμένη εξίσωση, το οποίο είναι αναμενόμενη απόρροια της μειωμένης ακρίβειας εκτίμησης της βάσης.

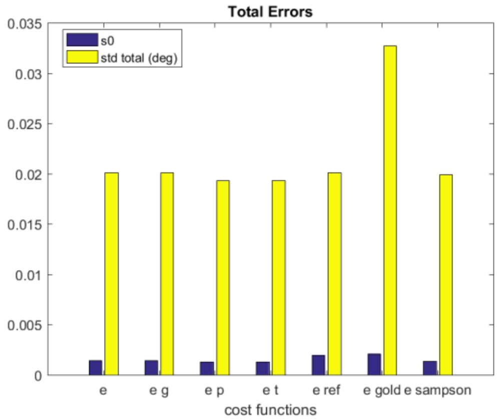
Επίδραση στοιχείων προσανατολισμού

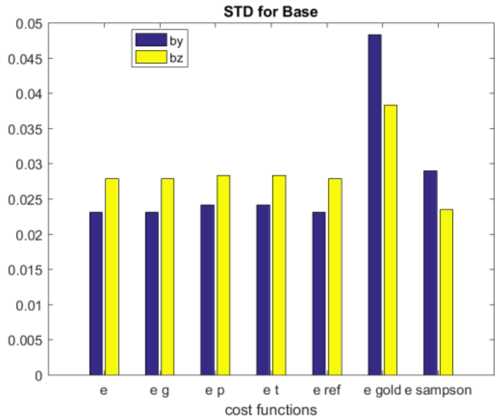
Στην προηγούμενη ενότητα διερευνήθηκε η επίδραση της κατανομής των σημείων στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού για τις επτά συναρτήσεις σφάλματος που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας. Παντού τα στοιχεία του σχετικού προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας παρέμειναν αμετάβλητα. Υπενθυμίζεται ότι στα προηγούμενα είχε θεωρηθεί μηδενική μετάθεση στην διεύθυνση Υ και στροφές ίσες με [ω φ κ] = [10˚ 45˚ 15˚]. Σε όλα τα αποτελέσματα που προηγήθηκαν παρατηρήθηκε αυξημένη αβεβαιότητα εκτίμησης της b_z σε σύγκριση με την b_y. Στην παρούσα ενότητα στόχος είναι να διερευνηθεί η επίδραση των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού στην ποιότητα της λύσης. Με άλλα λόγια, με δεδομένη την υπόθεση ότι η αιτία για την διαφοροποίηση της ακρίβειας εκτίμησης των δύο συνιστωσών της βάσης είναι, ή τουλάχιστον συνδέεται με, το ότι η μία συνιστώσα είναι μηδενική, στα επόμενα πειράματα μεταβάλλονται τόσο οι συνιστώσες της βάσης όσο και οι στροφές προκειμένου να επιβεβαιωθεί η υπόθεση αυτή ή να απορριφθεί.

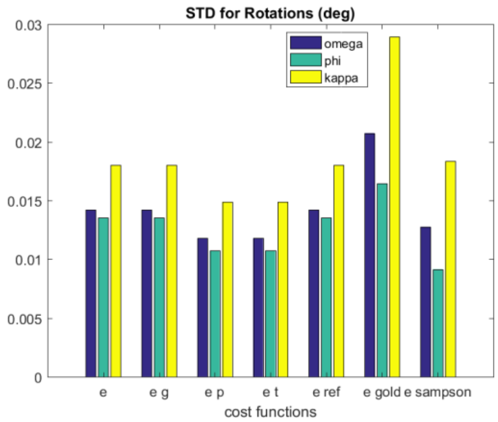
Σε όλα τα επόμενα εφαρμόζεται το ίδιο επίπεδο θορύβου με εκείνο της προηγούμενης ενότητας και χρησιμοποιούνται σημεία που κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις. Συνεπώς, τα πειράματα που ακολουθούν μπορούν να αξιολογηθούν αυτόνομα αλλά και σε σύγκριση με την περίπτωση Α της προηγούμενης ενότητας (απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων).

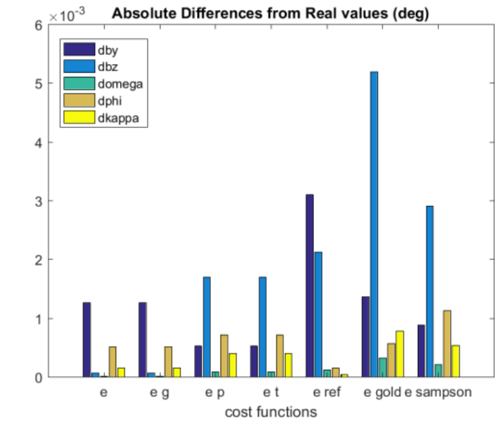
A. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Y και στην διεύθυνση Z

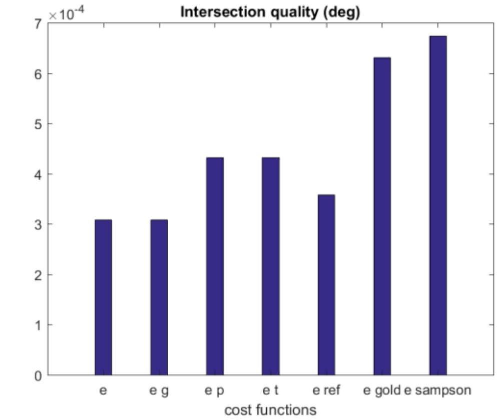
Στροφές όμοιες με εκείνες της προηγούμενης ενότητας και $b_y = b_z$











Κατ' αρχάς, παρατηρείται ότι οι τάξεις μεγέθους των σφαλμάτων που εμφανίζονται στα διαγράμματα δεν έχουν μεταβληθεί. Αυτό που έχει μεταβληθεί για όλες τις εξισώσεις είναι οι σχετικές ακρίβειες υπολογισμού των αγνώστων.

Αναλυτικότερα, όταν η b_y γίνει ίση με την b_z παρατηρείται ότι οι υπολογιζόμενες διαφορές των εκτιμώμενων τιμών για τις συνιστώσες της βάσης δεν είναι συστηματικά μεγαλύτερες για την b_z όπως προηγουμένως. Συγκεκριμένα, για τις δύο πρώτες εξισώσεις η εικόνα έχει αντιστραφεί, δηλαδή οι μεγαλύτερες αποκλίσεις υπολογίζονται για την by και όχι για την b_z. Από την άλλη πλευρά, στις υπόλοιπες εξισώσεις όπου η απόκλιση της bz εξακολουθεί να είναι μεγαλύτερη, παρατηρείται ότι πλέον υπολογίζεται σημαντική απόκλιση και για την b_y.

Από το διάγραμμα των τυπικών αποκλίσεων για τις στροφές παρατηρείται μικρή αύξηση των σφαλμάτων της ω για όλες τις συναρτήσεις σφάλματος, ενώ ταυτόχρονα παρατηρείται ότι οι αβεβαιότητες υπολογισμού των άλλων δύο στροφών είναι αριθμητικά πιο κοντά μεταξύ τους.

Από τα αναλυτικά αποτελέσματα παρατηρείται ότι ο συντελεστής συσχέτισης των συνιστωσών της βάσης όταν η b_y πάψει να είναι μηδενική ισούται περίπου με 0.25, ενώ στις περιπτώσεις όπου ήταν μηδενική η b_y οι δύο συνιστώσες της βάσης ήταν ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Επιπλέον παρατηρείται ότι η εξίσωση των δύο συνιστωσών της βάσης οδηγεί σε αύξηση της συσχέτισης μεταξύ των ω και φ όσο και σε εξίσωση της συσχέτισης μεταξύ κάθε μίας συνιστώσας της βάσης με την ω.

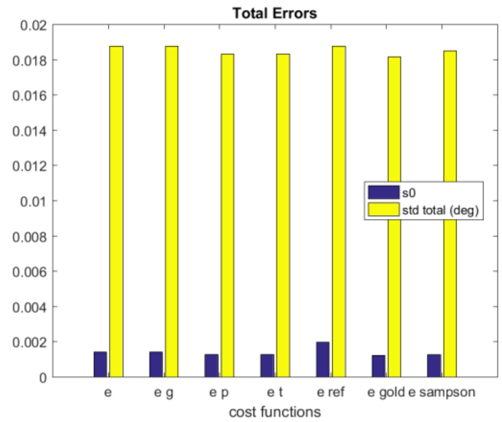
Από τα προηγηθέντα φαίνεται ότι οι τιμές που έχουν οι συνιστώσες της βάσης δείχνουν να επιδρούν στα αποτελέσματα αν και η επίδραση αυτή δεν είναι σημαντική με κριτήριο τις απόλυτες τιμές των υπολογιζόμενων σφαλμάτων. Ωστόσο, με βάση το παραπάνω πείραμα δεν είναι ξεκάθαρο το πώς ακριβώς επιδρά η εξίσωση των συνιστωσών της βάσης στην εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων του προσανατολισμού για κάθε μία συνάρτηση σφάλματος.

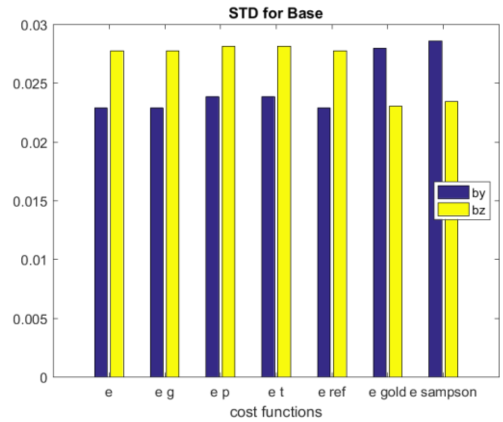
Β. *Ίση μετατόπιση στις διευθύνσεις Y και Z και ίσες στροφές*

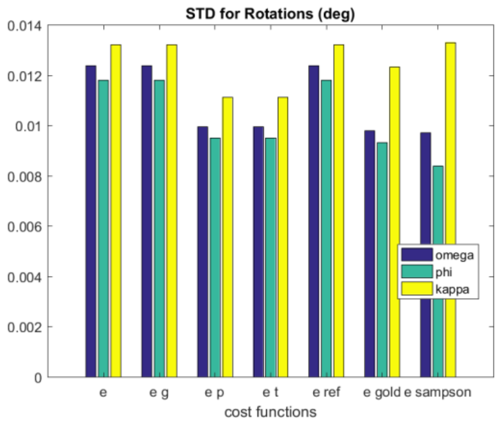
Χρησιμοποιήθηκαν στροφές [ω, φ, κ] =[10°,10°,10°] και $b_y = b_z$

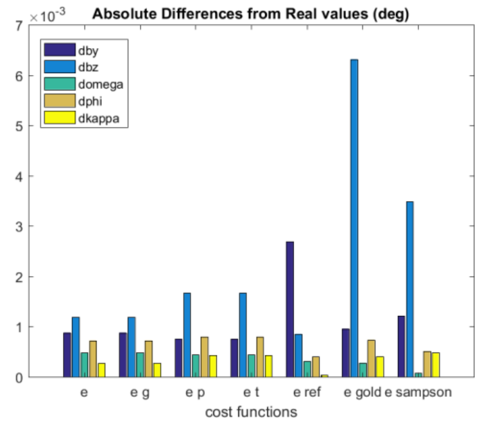
Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκαν ίδιες ακριβώς παράμετροι με προηγουμένως και επιπλέον θεωρήθηκαν και ίσες στροφές για την δεξιά εικόνα.

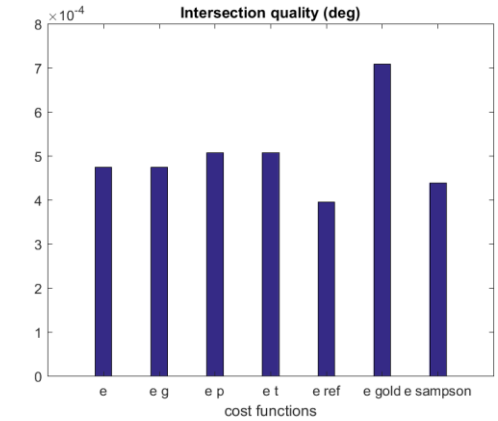
Με την πρώτη ματιά στα επόμενα διαγράμματα παρατηρείται ότι σε σχέση με προηγουμένως βελτιώνεται αισθητά η ακρίβεια της εξίσωσης $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$, και συγκεκριμένα η επίλυση είναι συγκρίσιμη με τις άλλες εξισώσεις (εάν εξεταστούν τα συνολικά μέτρα ακρίβειας). Στα επόμενα πάντως δίνεται κυρίως έμφαση στις πέντε πρώτες εξισώσεις καθώς από την προηγούμενη ήδη ενότητα έχει διαπιστωθεί ότι η εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ δεν είναι η πλέον κατάλληλη για σφαιρικές εικόνες.











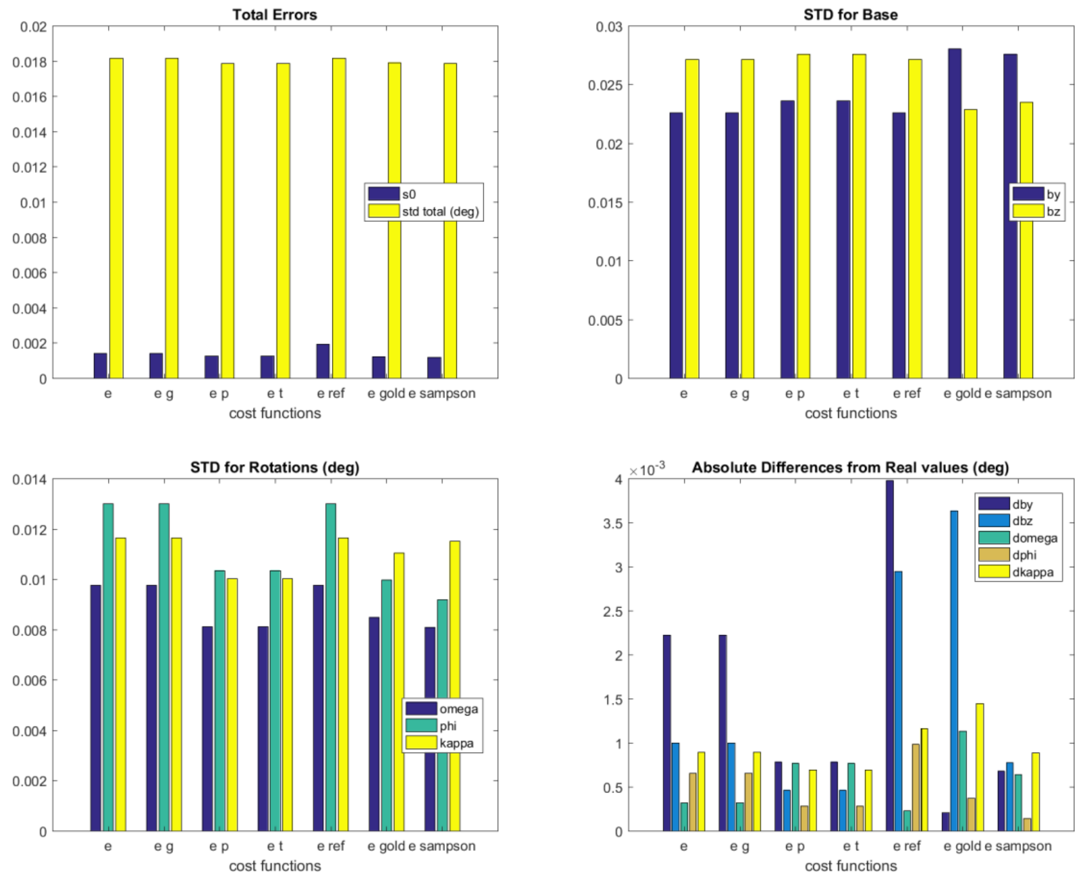
Παρατηρείται ότι βελτιώνεται ελαφρά η ακρίβεια υπολογισμού των στροφών για όλες τις εξισώσεις, ενώ η ακρίβεια εκτίμησης της βάσης παραμένει αμετάβλητη. Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται ότι οι διαφορές μεταξύ αυτής και της προηγούμενης περίπτωσης δεν είναι σημαντικές αριθμητικά, και άρα η φαινόμενη βελτίωση των τυπικών αποκλίσεων για τις στροφές πιθανώς να οφείλεται σε αριθμητικούς λόγους που αφορούν την επίλυση. Επιπλέον, από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών παρατηρείται ότι για τις δύο πρώτες εξισώσεις οι υπολογιζόμενες διαφορές για τους αγνώστους είναι πιο κοντά μεταξύ τους. Αναλυτικότερα, για κάθε μία εξίσωση από τις δύο πρώτες οι απόλυτες διαφορές των συνιστωσών της βάσης είναι παραπλήσιες, και παρόμοια εικόνα έχουν οι απόλυτες διαφορές των στροφών. Από την άλλη πλευρά, στις επόμενες τρεις εξισώσεις φαίνεται ότι οι απόλυτες διαφορές των τριών στροφών είναι πιο κοντά αριθμητικά μεταξύ τους, αλλά οι διαφορές για την bz συνεχίζουν να είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες που υπολογίζονται για την b_y. Τέλος, στο διάγραμμα της ακρίβειας της εμπροσθοτομίας δεν παρατηρούνται αξιοσημείωτες διαφορές με την προηγούμενη περίπτωση όσον αφορά τις τιμές των σφαλμάτων. Εκείνο που παρατηρείται είναι ότι οι τιμές που υπολογίζονται για όλες τις εξισώσεις (εάν εξαιρεθεί η $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$) είναι πιο κοντά μεταξύ τους.

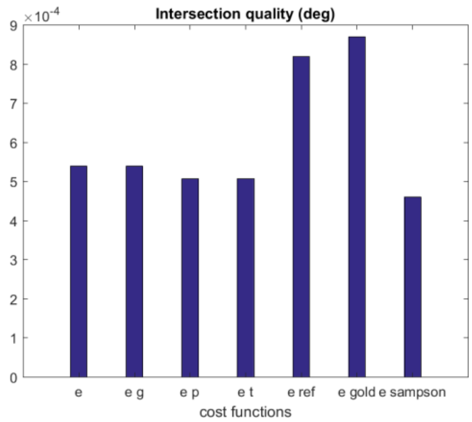
Συνεπώς, με βάση τα προηγηθέντα φαίνεται ότι όταν χρησιμοποιηθούν ίσες τιμές και για τις τρεις στροφές, τότε όλα τα μέτρα ακρίβειας των στροφών πλησιάζουν μεταξύ τους για όλες τις εξισώσεις. Επίσης φαίνεται ότι η αλλαγή των τιμών των στροφών δεν επηρεάζει μόνο την ακρίβεια εκτίμησής τους αλλά και την ακρίβεια εκτίμησης των συνιστωσών της βάσης, με τρόπο όμως που διαφοροποιείται ανάλογα με την εξίσωση. Άρα, με βάση τα παραπάνω αλλά και το ότι οι διαφορές για τις οποίες γίνεται λόγος εδώ δεν είναι αριθμητικά σημαντικές, μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μεταβολές που προκαλούνται από την διαφοροποίηση των τιμών των στροφών μπορούν να αποδοθούν σε αριθμητικούς λόγους καθώς δεν διαπιστώνεται συστηματική μεταβολή για όλες τις εξισώσεις που να υποδεικνύει κάποια γεωμετρική αιτία.

Παρ' όλα αυτά, για περαιτέρω διερεύνηση υλοποιήθηκαν τρία ακόμα πειράματα στα οποία εφαρμόζεται μία μόνο στροφή κάθε φορά, έτσι ώστε αν υπάρχει κάποια γεωμετρική αιτία πίσω από τα όσα προαναφέρθηκαν να είναι ευκολότερο αυτή να διαφανεί.

Γ. Ίση μετατόπιση στις διευθύνσεις Y και Z και στροφή ω

Χρησιμοποιήθηκαν στροφές [ω, φ, κ] =[10°,0°,0°] και $b_y = b_z$

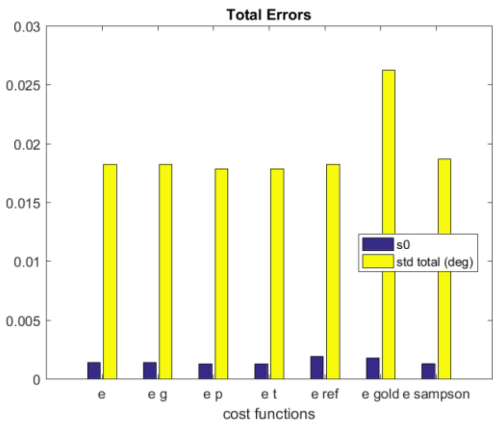


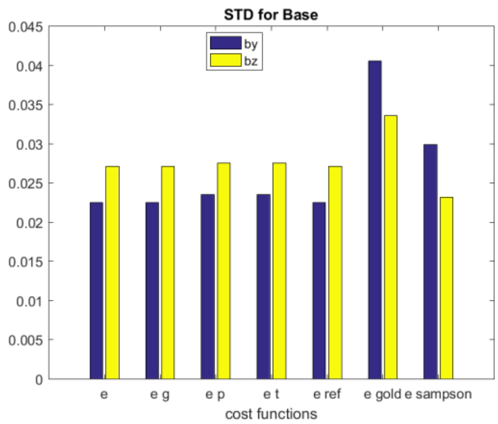


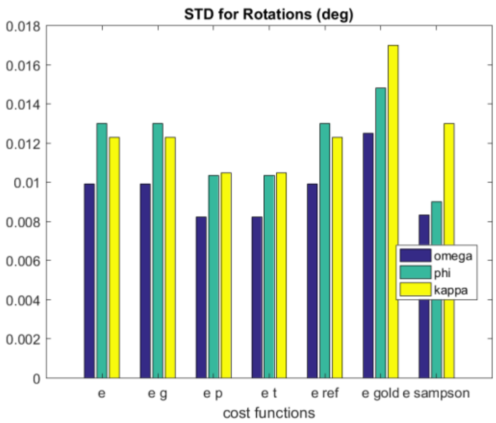
Παρατηρείται εδώ ότι οι υπολογιζόμενες τυπικές αποκλίσεις για την βάση δεν παρουσιάζουν μεταβολές για καμία εξίσωση, ενώ οι τυπικές αποκλίσεις των τριών στροφών δείχνουν μικρή αύξηση της ακρίβειας της ω. Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών φαίνεται μικρή βελτίωση στις εκτιμώμενες τιμές των αγνώστων, και ταυτόχρονα παρατηρείται ότι ο μηδενισμός των φ και κ οδηγεί στην αύξηση της απόλυτης διαφοράς για την b_y σε σχέση με την αντίστοιχη που υπολογίζεται για την b_z.

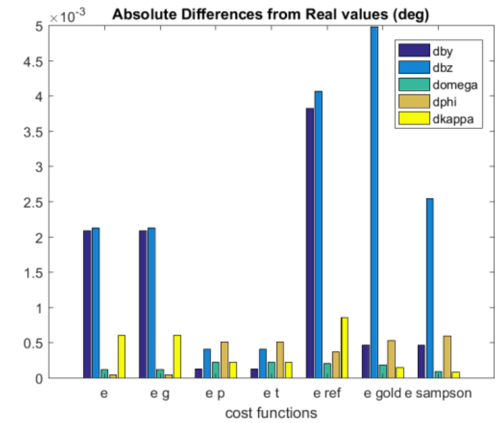
Δ. Ίση μετατόπιση στις διευθύνσεις Y και Z και στροφή φ

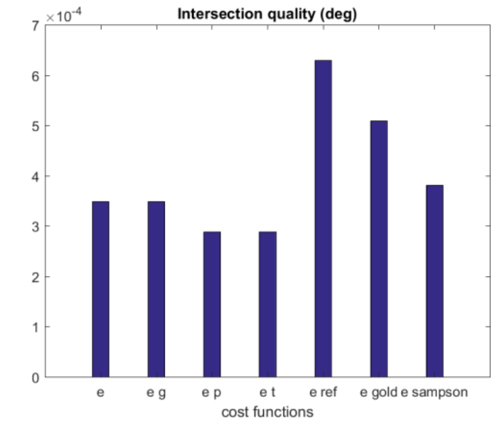
Χρησιμοποιήθηκαν στροφές [ω, φ, κ] =[0°,10°,0°] και $b_y = b_z$







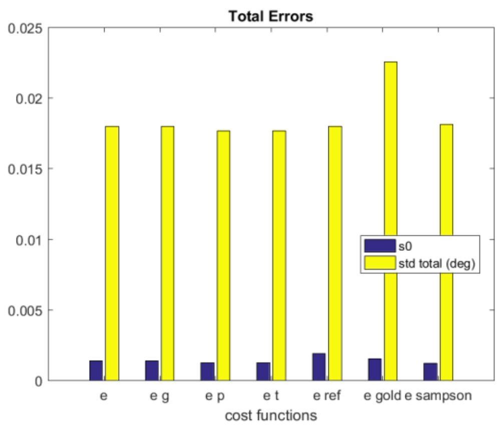


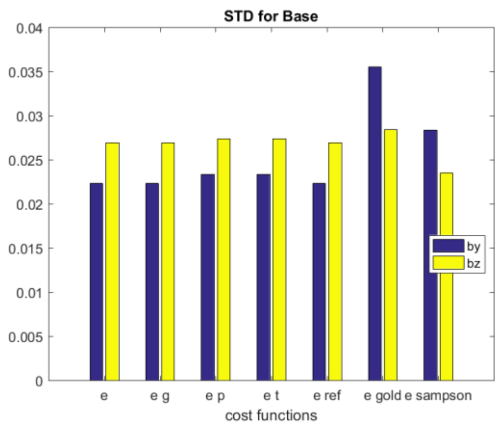


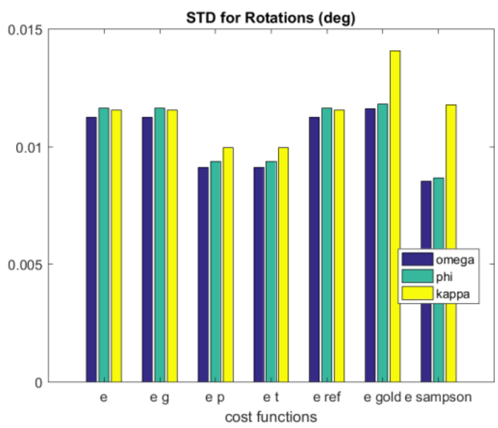
Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι οι υπολογιζόμενες τυπικές αποκλίσεις για την βάση και πάλι δεν παρουσιάζουν μεταβολές για καμία εξίσωση, ενώ οι τυπικές αποκλίσεις των τριών στροφών δείχνουν μικρή αύξηση της ακρίβειας της ω και μικρή επιδείνωση της ακρίβειας της κ. Από το διάγραμμα των απόλυτων διαφορών φαίνεται ότι οι τιμές για τις δύο συνιστώσες της βάσης είναι πιο κοντά μεταξύ τους για όλες τις εξισώσεις και ότι η ακρίβεια εκτίμησης των εξισώσεων $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ για όλες τις παραμέτρους βελτιώνεται σε σχέση με την περίπτωση Β.

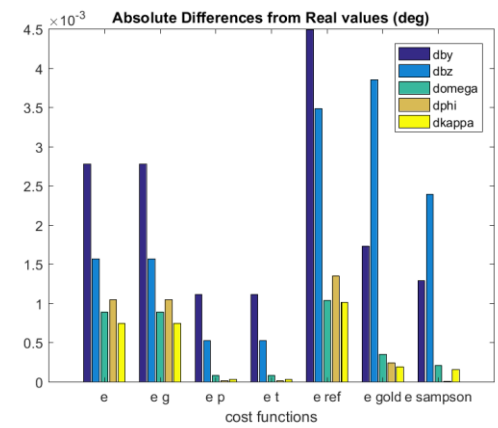
Ε. Ίση μετατόπιση στις διευθύνσεις Υ και Ζ και στροφή κ

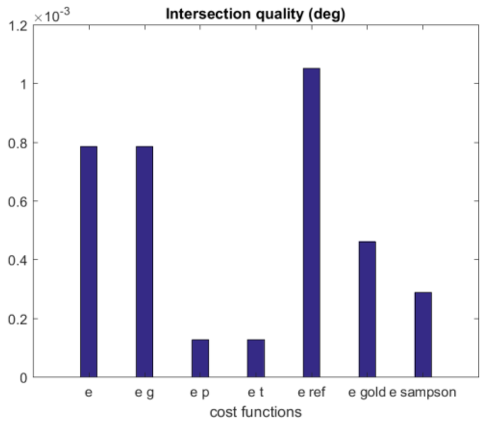
Χρησιμοποιήθηκαν στροφές [ω, φ, κ] =[0°,0°,10°] και $b_y = b_z$









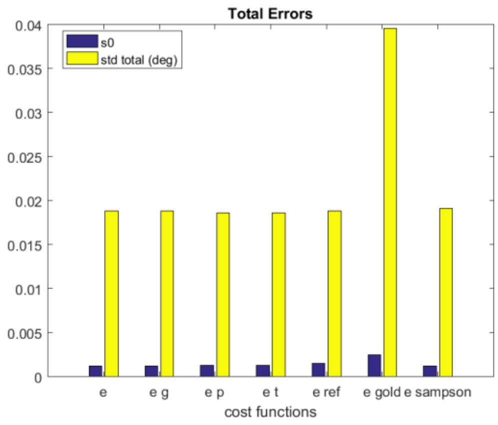


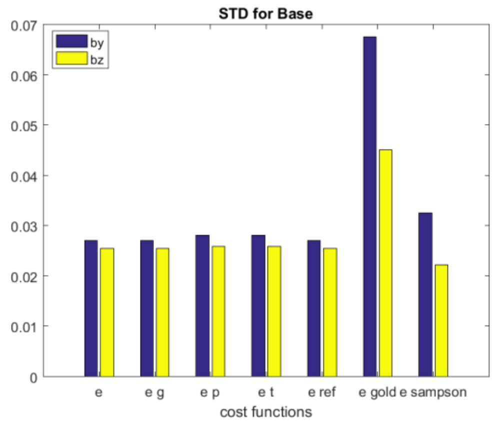
Με βάση τα αποτελέσματα φαίνεται ότι και πάλι η ακρίβεια εκτίμησης της βάσης, με βάση τις υπολογιζόμενες τυπικές αποκλίσεις, δεν μεταβάλλεται. Οι τυπικές αποκλίσεις των τριών στροφών βελτιώνονται ελαφρά για όλες τις εξισώσεις, και ταυτόχρονα υπολογίζονται πιο κοντά η μία στην άλλη. Στο διάγραμμα, τέλος, των απόλυτων διαφορών παρατηρείται και πάλι αύξηση της υπολογιζόμενης διαφοράς της by σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή για την bz. Σε απόλυτους αριθμούς, οι απόλυτες διαφορές για όλες τις εξισώσεις είναι μικρότερες σε σχέση με τις αντίστοιχες της περίπτωσης Β, και ειδικά για τις εξισώσεις $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ οι αποκλίσεις που υπολογίζονται για τις στροφές είναι πάρα πολύ μικρές. Η βελτίωση των αποτελεσμάτων των δύο αυτών εξισώσεων φαίνεται και από την ακρίβεια της εμπροσθοτομίας που υπολογίζεται.

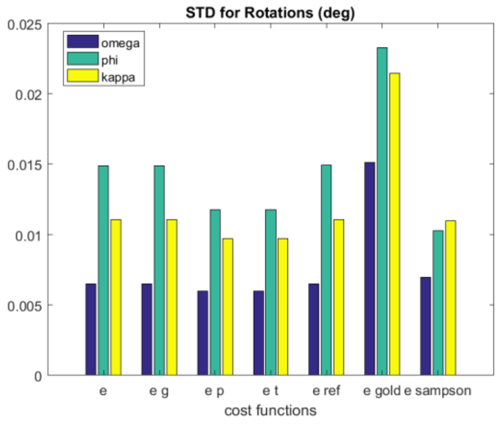
ΣΤ. De-rotate (προσεγγιστική αποκατάσταση στροφών)

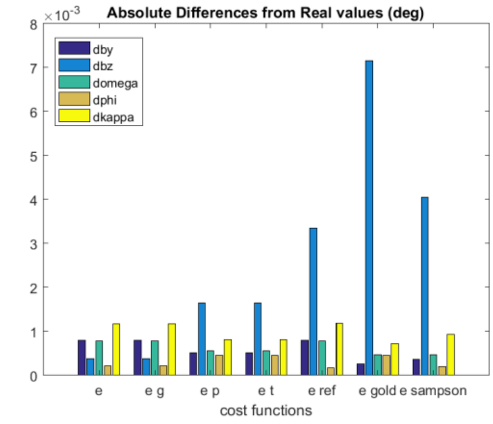
Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι της περίπτωσης Α της προηγούμενης ενότητας (απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων) προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση των τιμών των στροφών στην λύση του σχετικού προσανατολισμού. Από τα προηγούμενα πειράματα έχει φανεί ότι οι τιμές των στροφών επηρεάζουν τα τελικά αποτελέσματα, όμως χωρίς να εντοπίζεται στα αποτελέσματα συστηματικότητα που να υποδηλώνει ότι οι προκύπτουσες διαφορές συνδέονται με την ίδια την γεωμετρία του προβλήματος και όχι απλώς με την αριθμητική του λύση.

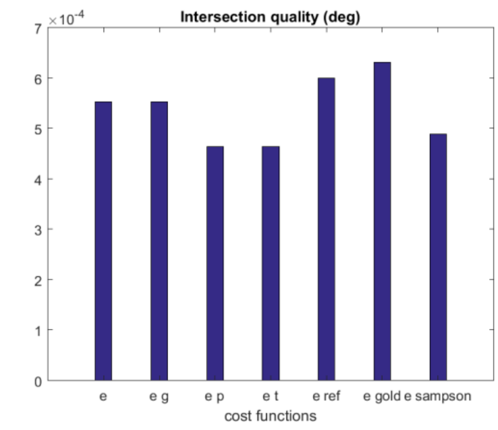
Με βάση τα όσα έχουν αναφερθεί για τις σφαιρικές εικόνες, ο ορισμός του συστήματος αναφοράς «δεν έχει σημασία», με την έννοια ότι, θεωρητικά, δεν επηρεάζει την γεωμετρία του προβλήματος. Έτσι θα ανέμενε κανείς οι μεταβολές των στροφών να μην επιδρούν στα αποτελέσματα καθώς όποιες και αν είναι οι στροφές της δεξιάς εικόνας, η ομοιόμορφη κατανομή των σημείων ισοδυναμεί με διατήρηση του σχήματος της δέσμης. Παρ' όλα αυτά, κάτι τέτοιο δεν επιβεβαιώθηκε από τα προηγηθέντα αποτελέσματα. Έτσι στην περίπτωση αυτή, αφού ολοκληρωθεί η γραμμική επίλυση οι αρχικές τιμές των στροφών που προκύπτουν χρησιμοποιούνται για να στρέψουν την δεξιά δέσμη κατά τρόπο που οι στροφές της στο σύστημα του μοντέλου να είναι μηδενικές. Μετά την στροφή της δεξιάς δέσμης προφανώς οι αρχικές τιμές για τις άγνωστες στροφές που δίνονται στην μη γραμμική επίλυση δεν είναι πλέον εκείνες που προέκυψαν από τον πίνακα **E** αλλά είναι μηδενικές.



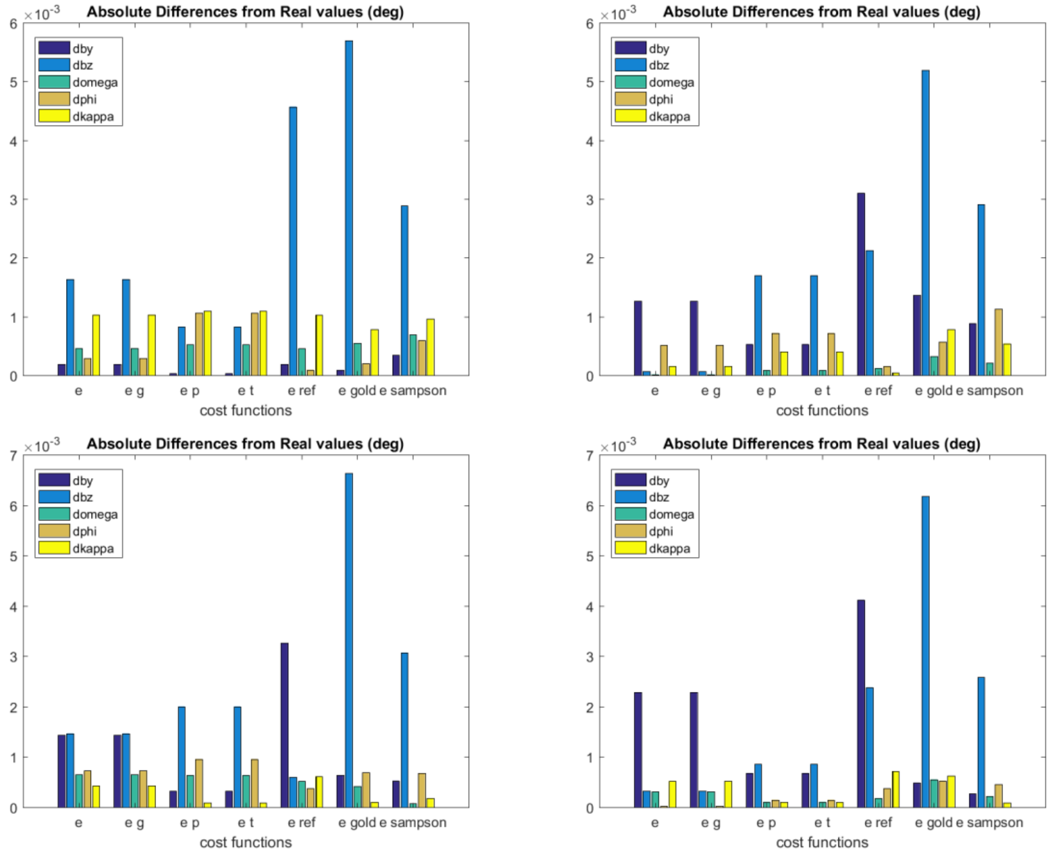








Θεωρητικά τουλάχιστον, τα αποτελέσματα που προκύπτουν εδώ θα έπρεπε να μην διαφέρουν από εκείνα της περίπτωσης Α της προηγούμενης ενότητας καθώς η στροφή της δεξιάς δέσμης δεν αλλάζει την γεωμετρία του προβλήματος. Παρ' όλα αυτά, στα παραπάνω διαγράμματα διαπιστώνονται διαφορές σε σχέση με τα αντίστοιχα της απλής περίπτωσης σφαιρικών εικόνων, και συγκεκριμένα οι κυριότερες διαφορές εντοπίζονται στο διάγραμμα των απόλυτων διαφορών. Συνεπώς, με δεδομένο ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχει μεταβληθεί καμία παράμετρος που να αφορά στη γεωμετρία, οι διαφορές αυτές οφείλονται αποκλειστικά σε αριθμητική αστάθεια της λύσης, η οποία συνδέεται κυρίως με τον τρόπο έκφραση και εκτίμησης των στροφών. Για να επιβεβαιωθεί αυτό, επαναλήφθηκε το πείραμα της απλής περίπτωσης σφαιρικών εικόνων τρεις φορές (τα ακόλουθα διαγράμματα προέκυψαν μετά από 500 επαναλήψεις για κάθε μία από τις τρεις εκτελέσεις) και πράγματι τα αποτελέσματα διέφεραν και στις περιπτώσεις αυτές.

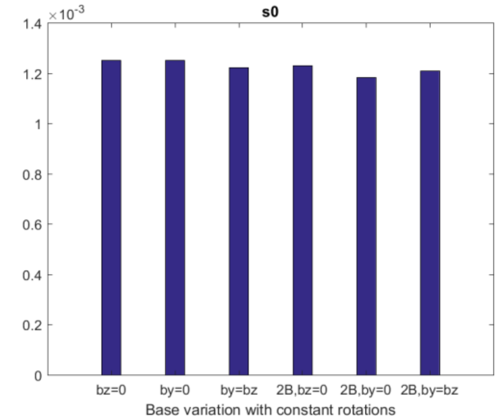


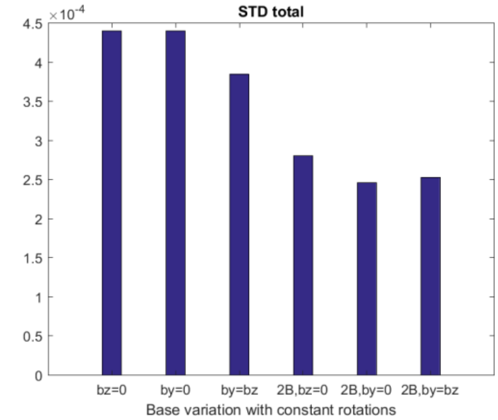
Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούνται διαφορές μεταξύ των απόλυτων διαφορών παρά το γεγονός ότι οι χρησιμοποιούμενες παράμετροι ήταν ακριβώς οι ίδιες. Το πρώτο διάγραμμα είναι αυτό της περίπτωσης Α της προηγούμενης ενότητας, ενώ τα υπόλοιπα τρία είναι εκείνα που προέκυψαν μετά τις επαναλήψεις της εκτέλεσης. Μολονότι οι υπολογιζόμενες διαφορές είναι οπτικά αισθητές, οι τάξεις μεγέθους των διαγραμμάτων είναι ίδιες και οι μεταξύ τους διαφορές δεν ξεπερνούν το 0.001˚ (όταν ο θόρυβος που έχει επιβληθεί στις παρατηρήσεις είναι ίσος με 0.1˚).

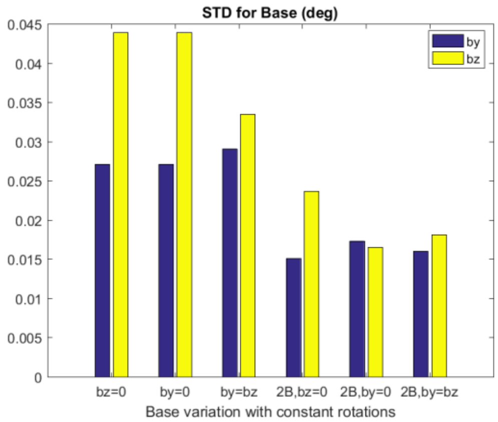
Ζ. Μεταβολή του μήκους και των συνιστωσών της βάσης

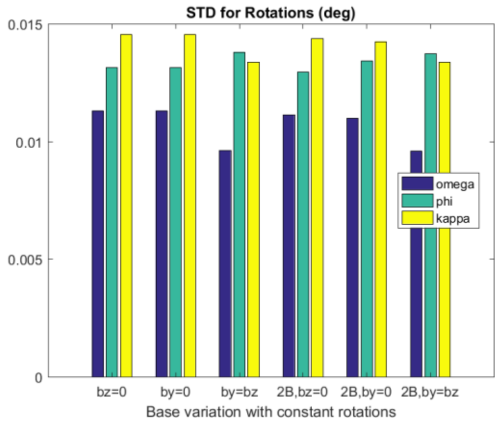
Ομοιόμορφη κατανομή σημείων στο χώρο προς όλες τις διευθύνσεις και σημεία σε κανονικές αποστάσεις

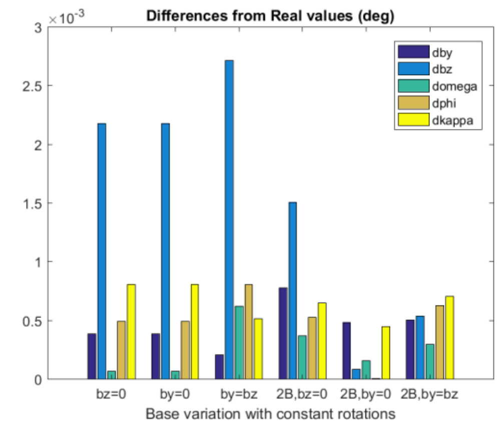
Στην περίπτωση αυτή υλοποιήθηκαν έξι διαφορετικές εκτελέσεις με ίδιες παραμέτρους για το πλήθος και την κατανομή των σημείων στο χώρο και για μία μόνο συνάρτηση σφάλματος (κλασική συνεπιπεδότητα). Οι στροφές ήταν κοινές και για τις έξι περιπτώσεις, δηλαδή μεταβάλλονταν μόνο οι συνιστώσες της βάσης. Στις τρεις πρώτες εκτελέσεις το μέτρο της βάσης διατηρήθηκε ίδιο και άλλαζαν οι συνιστώσες b_y και b_z. Στις επόμενες τρεις εκτελέσεις διπλασιάστηκε το μέτρο της βάσης και ταυτόχρονα άλλαζαν και οι συνιστώσες b_y και b_z. Τα σημεία που χρησιμοποιήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις ήταν σε αποστάσεις 20, 40 και 60 μονάδες, ενώ τα μήκη της βάσης ήταν 6 και 12 μονάδες για κάθε τριάδα, αντίστοιχα.

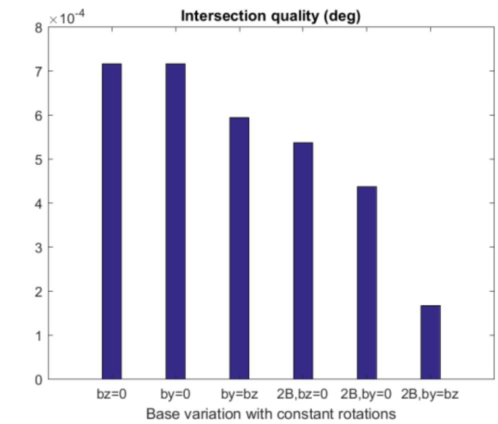












Από το πρώτο διάγραμμα παρατηρείται ότι η ελαχιστοποίηση του σφάλματος δεν διαφοροποιείται σημαντικά σε καμία εκτέλεση, και άρα ότι η λύση συγκλίνει εξίσου εύκολα σε όλες τις περιπτώσεις. Το συνολικό σφάλμα σε γενικές γραμμές είναι μεγαλύτερο για τις τρεις πρώτες εκτελέσεις από ό,τι για τις τρεις επόμενες, γεγονός που σημαίνει ότι το μήκος της βάσης επηρεάζει και την ακρίβεια του προσανατολισμού και όχι μόνο της εμπροσθοτομίας. Από την άλλη πλευρά, η ακρίβεια της εμπροσθοτομίας όπως είναι αναμενόμενο αυξάνει όταν μεγαλώνει η βάση του στερεοζεύγους. Παρατηρείται επίσης ότι όταν εξισώνονται οι δύο συνιστώσες της βάσης η ακρίβεια αυξάνεται από όταν η μία εκ των δύο συνιστωσών είναι μηδενική.

Σχετικά με την ακρίβεια των στροφών, παρατηρούνται κατ' αρχάς διαφορές της τάξης 0.005˚ στο διάγραμμα των τυπικών αποκλίσεων. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η σχετική ακρίβεια των τριών στροφών είναι σχεδόν ίδια μεταξύ των περιπτώσεων όπου η συνιστώσες της βάσης είναι ίδιες (δηλαδή σε σύγκριση πρώτης με τέταρτη περίπτωση, δεύτερης με πέμπτη και τρίτης με έκτη, ανεξάρτητα από το μήκος της βάσης).

Σχετικά με την ακρίβεια της βάσης, από το διάγραμμα των τυπικών αποκλίσεων των συνιστωσών της παρατηρείται ότι στις τρεις πρώτες περιπτώσεις (όπου τα μήκος της βάσης είναι μικρό) η b_z παρουσιάζει μεγαλύτερο σφάλμα, το οποίο μειώνεται όταν εξισωθούν οι δύο συνιστώσες. Οι διαφορές αυτές μειώνονται όταν αυξηθεί το μήκος της βάσης.

Τέλος, από τις απόλυτες διαφορές παρατηρείται ότι η διαφορά που υπολογίζεται για την b_z είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη που υπολογίζεται για την b_y στις 4 πρώτες περιπτώσεις, ενώ όταν μεγαλώσει το μήκος της βάσης και εξισωθούν και οι δύο συνιστώσες οι υπολογιζόμενες διαφορές για την b_y και την b_z είναι σχεδόν ίσες.

6

Συμπεράσματα

Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα των πειραμάτων που έγιναν με στόχο την αξιολόγηση των συναρτήσεων σφάλματος ως προς την επίδραση του θορύβου στις παρατηρήσεις, της κατανομής των σημείων του χώρου και των παραμέτρων προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας. Εκτός όμως από την διερεύνηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων, βασικό μέρος της εργασίας ήταν και η διερεύνηση της συμβολής της σφαιρικής γεωμετρίας στο πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού. Με άλλα λόγια, η χρήση των σφαιρικών εικόνων εξετάζεται σε σχέση με τις χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις σφάλματος αλλά και σε σχέση με την γεωμετρία των συμβατικών εικόνων. Στην ενότητα αυτή, λαμβανομένων υπόψη των παραπάνω, επιχειρείται η συνοπτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και η διατύπωση βασικών συμπερασμάτων που απορρέουν από αυτά.

Η **πρώτη** ομάδα πειραμάτων αφορούσε την αξιολόγηση κάθε μίας συνάρτησης σφάλματος ως προς την επίδραση διαφορετικών επιπέδων θορύβου. Η παράμετρος του θορύβου είναι συχνά η πρώτη παράμετρος που εξετάζεται σε αντίστοιχες εργασίες *(Fujiki, 2008, Pagani & Stricker, 2011, Fathy et al., 2017)* με δεδομένο ότι το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού αναφέρεται ως ιδιαίτερα ευαίσθητο στην ύπαρξη θορύβου. Επιπλέον, η μελέτη της συμπεριφοράς κάθε συνάρτησης σφάλματος μπορεί να γίνει αντιληπτή και ως διερεύνηση του πόσο εύκολα ή δύσκολα η συνάρτηση μπορεί απλώς να συγκλίνει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο υπό την παρουσία θορύβου. Από τα πειράματα που έγιναν στο πλαίσιο της εργασίας προκύπτει κατ' αρχάς ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ δεν είναι κατάλληλη για την επίλυση του σχετικού προσανατολισμού όταν οι εικόνες που χρησιμοποιούνται είναι σφαιρικές, παρά μόνο όταν ο θόρυβος των παρατηρήσεων είναι πολύ χαμηλός. Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{\varepsilon_{p}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{t}}$ έχουν συνολικά την καλύτερη επίδοση αν ληφθούν υπόψη όλα τα μέτρα ακρίβειας που υπολογίζονται. Μολονότι οι διαφορές τους με τις υπόλοιπες συναρτήσεις δεν είναι αριθμητικά μεγάλες, οι δύο αυτές εξισώσεις παρουσιάζουν σταθερά ανώτερα αποτελέσματα για τα περισσότερα επίπεδα θορύβου. Από την άλλη πλευρά, όταν ο θόρυβος αυξηθεί σημαντικά οι συναρτήσεις $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$ κρίνονται υπέρτερες καθώς η ακρίβειά τους μειώνεται αναλογικά με τον θόρυβο, ενώ των υπολοίπων όχι, καθώς εκείνες παρουσιάζουν και ακραίες τιμές σε ορισμένες περιπτώσεις. Με δεδομένο ότι η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας προτάθηκαν και αξιολογήθηκαν και από τους *Pagani & Stricker (2011)*, θα πρέπει να επισημανθεί ότι εκείνοι καταλήγουν να κρίνουν την συνάρτηση $\boldsymbol{\varepsilon_g}$ ως καλύτερη, χωρίς και πάλι πάντως να προκύπτουν σημαντικές διαφορές με τις υπόλοιπες. Αιτία για αυτήν την διαφοροποίηση πιθανώς είναι το γεγονός ότι οι παράμετροι των πειραμάτων είναι αρκετά διαφορετικές στην δική τους εργασία σε σχέση με την παρούσα. Συγκεκριμένα, αν και οι *Pagani & Stricker (2011)* εφαρμόζουν τα ίδια επίπεδα θορύβου, χρησιμοποιούν ένα ζεύγος πραγματικών σφαιρικών εικόνων χωρίς να αναφέρουν ποια είναι τα στοιχεία του προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας.

Η **δεύτερη** και εκτενέστερη ενότητα πειραμάτων αφορούσε την μελέτη της επίδρασης της γεωμετρίας των σημείων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού. Στο πλαίσιο αυτό αξιολογήθηκαν κρίσιμες γεωμετρίες σημείων τόσο για σφαιρικές όσο και για εικόνες περιορισμένου γωνιακού ανοίγματος. Το πρώτο βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η ακρίβεια εκτίμησης των στροφών στην περίπτωση της σφαιρικής κατανομής σημείων είναι καλύτερη, για όλες τις εξισώσεις, από την ακρίβεια εκτίμησης της βάσης. Επιπλέον, αν ληφθούν υπόψη και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την κατανομή σημείων μικρότερου γωνιακού εύρους, τότε φαίνεται ότι για όλες τις εξισώσεις σφάλματος το συνολικό γωνιακό σφάλμα που υπολογίζεται είναι μεγαλύτερο από ό,τι προηγουμένως. Άρα, διαπιστώνεται ότι πράγματι η χρήση πανοραμικών εικόνων βελτιώνει την ποιότητα λύσης του σχετικού προσανατολισμού, και ειδικότερα η **χρήση σφαιρικών εικόνων ενισχύει την ακρίβεια εκτίμησης των στροφών.** Κατά τα άλλα, αν και οι διαφορές της ακρίβειας των επιμέρους εξισώσεων είναι μικρές, από το σύνολο των διαγραμμάτων που αφορούν τις παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού καταλληλότερες φαίνεται να είναι και πάλι οι $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$. Όσον αφορά την εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ θα πρέπει να επισημανθεί ότι η ακρίβειά της βελτιώνεται σημαντικά στην περίπτωση των συμβατικών εικόνων (δηλαδή οι τιμές των σφαλμάτων της είναι συγκρίσιμες με εκείνες των υπολοίπων εξισώσεων), και άρα επιβεβαιώνεται η καταλληλότητα αυτής της γεωμετρικής ποσότητας για τις συμβατικές εικόνες. Τέλος, η βελτίωση της εκτίμησης των στροφών στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων αντανακλάται και στην βελτίωση της ακρίβειας της εμπροσθοτομίας στις εικόνες αυτές.

Η επίδραση του εύρους της κατανομής των σημείων εξετάστηκε και σε συνδυασμό με τις αποστάσεις τους από τα σημεία λήψης. Συγκεκριμένα, για σφαιρικές και συμβατικές εικόνες χρησιμοποιήθηκαν πολύ μακρινά σημεία αλλά και σημεία του απείρου. Γενικά, όταν οι αποστάσεις των σημείων μεγαλώνουν το συνολικό σφάλμα της συνάρτησης $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ υπερβαίνει τα επιτρεπόμενα όρια καθώς η επίλυση της εμπροσθοτομίας είναι πολύ αβέβαιη σε τέτοια σημεία. Επιπλέον, παρατηρείται ότι όταν χρησιμοποιούνται μακρινά σημεία αυτό που χειροτερεύει σημαντικά είναι η ακρίβεια εκτίμησης της βάσης και όχι των στροφών, γεγονός που συνδέεται και εξηγεί έως ένα βαθμό τις προσπάθειες διαχωρισμού των παραμέτρων, δηλαδή της εκτίμησης των στροφών ανεξάρτητα από την μετάθεση. Τέλος, η ακρίβεια της εμπροσθοτομίας προφανώς επιδεινώνεται και συγκεκριμένα κατά περίπου μία τάξη μεγέθους.

Αναλυτικότερα, η χρήση σφαιρικών εικόνων και απομακρυσμένων σημείων αναδεικνύει και πάλι ως καλύτερες εξισώσεις τις $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ με βάση όλα τα μέτρα ακρίβειας. Η βασική υπεροχή αυτών των δύο συναρτήσεων προκύπτει από το διάγραμμα σύγκρισης με τα αληθή δεδομένα, όπου σε αντίθεση με τις άλλες εξισώσεις οι δύο αυτές πετυχαίνουν πολύ καλύτερη εκτίμηση και για τις δύο συνιστώσες της βάσης. Από την άλλη πλευρά, η χρήση των απομακρυσμένων σημείων επιφέρει συνολική επιδείνωση της ακρίβειας (σε σύγκριση με την απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων), η οποία οφείλεται στην αύξηση των σφαλμάτων της βάσης ενώ σφάλματα των στροφών παραμένουν ίδια.

Συμπερασματικά, οι εξισώσεις $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ επιδεικνύουν την υψηλότερη ακρίβεια τόσο στην εκτίμηση των στοιχείων του προσανατολισμού όσο και στην επίλυση της εμπροσθοτομίας ανεξαρτήτως του γωνιακού εύρους και των αποστάσεων των σημείων.

Η επόμενη περίπτωση που εξετάστηκε ήταν η χρήση σημείων κοντά στους πόλους και γενικότερα στην περιοχή της βάσης (προφανώς μόνο για σφαιρικές εικόνες). Υλοποιήθηκαν τρία πειράματα με σημεία μόνο από την πλευρά της αριστερής εικόνας, μόνο από την πλευρά της δεξιάς και με σημεία και από τις δύο πλευρές. Τα βασικά συμπεράσματα είναι ότι όλες οι εξισώσεις κατορθώνουν να λύσουν αλλά με κατώτερη ακρίβεια από ό,τι στις προηγούμενες περιπτώσεις. Εξαίρεση αποτελεί και πάλι η συνάρτηση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$, τα σφάλματα της οποίας είναι συγκριτικά πολύ μεγάλα , πράγμα λογικό καθώς η επίλυση της εμπροσθοτομίας σημείων στη διεύθυνση της βάσης δεν είναι δυνατή. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η επιδείνωση της ακρίβειας που διαπιστώνεται για τις υπόλοιπες έξι εξισώσεις οφείλεται σε μειωμένης ακρίβειας εκτίμηση των συνιστωσών της βάσης και της ω (στροφή περί τον άξονα X). Τέλος, από τα πειράματα που έγιναν με χρήση σημείων μόνο από την μία πλευρά του ζεύγους διαπιστώνεται ότι όταν τα σημεία κατανέμονται στην εξωτερική περιοχή της αριστερής (σταθερής) εικόνας η επίλυση είναι πιο αβέβαιη.

Τα τελευταία πειράματα αφορούσαν την χρήση σημείων πάρα πολύ μακριά από τα σημεία λήψης, που δηλαδή ισοδυναμούν με σημεία του απείρου. Από τα πειράματα αυτά δεν κατέστη δυνατή η εκτίμηση της βάσης παρά μόνο των στροφών. Συνεπώς, επιβεβαιώνεται ότι **η χρήση σημείων του απείρου καθιστά αδύνατη την εκτίμηση της βάσης** (πράγμα αναμενόμενο) **αλλά επιτρέπει την εκτίμηση των στροφών**. Αναλυτικότερα, στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων όλες οι εξισώσεις δεν προσεγγίζουν μεν καλά την βάση αλλά εκτιμούν ορθά τις στροφές με διαφορές από τις πραγματικές τιμές της τάξης του 0.05° (προφανώς ανακριβέστερη εκτίμηση από εκείνην στην απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων). Στην περίπτωση συμβατικών εικόνων, οι 5 εξισώσεις καταλήγουν σε παρόμοια αποτελέσματα μεταξύ τους, ενώ οι $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{sampson}}$ αποτυγχάνουν πλήρως να οδηγηθούν σε σωστή λύση. Ειδικότερα, οι 5 εξισώσεις εκτιμούν μεν τις στροφές αλλά με υποδεέστερη ακρίβεια από ό,τι στις περιπτώσεις όπου τα σημεία ήταν πιο κοντά στις εικόνες.

Εάν τώρα συγκριθούν οι περιπτώσεις σφαιρικών και συμβατικών εικόνων με σημεία του απείρου, στην δεύτερη περίπτωση η ακρίβεια εκτίμησης των στροφών υστερεί της πρώτης. Επιπλέον, η επιδείνωση της ακρίβειας των στροφών μεταξύ της απλής περίπτωσης συμβατικών εικόνων και της περίπτωσης συμβατικών εικόνων με σημεία του απείρου είναι πολύ πιο έντονη από ό,τι η αντίστοιχη επιδείνωση όταν τα σημεία κατανέμονται σε όλες τις διευθύνσεις του χώρου. Συνοψίζοντας: η χρήση σημείων του απείρου καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό της βάσης ενώ παράλληλα επιδεινώνει την ακρίβεια εκτίμησης των στροφών, οι οποίες όμως εξακολουθούν να υπολογίζονται.

Τέλος, όταν έγινε προσθήκη ενός κοντινού σημείου παρατηρήθηκε βελτίωση της ακρίβειας εκτίμησης των στροφών για όλες τις εξισώσεις αλλά μόνο οι $\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_{reform}}$ κατόρθωσαν να εκτιμήσουν και την διεύθυνση της βάσης.

Η **τρίτη** ενότητα πειραμάτων αφορούσε την μεταβολή των στοιχείων του σχετικού προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας ώστε να διαπιστωθεί κατά πόσο οι τιμές των στροφών και των συνιστωσών της βάσης επηρεάζουν την ακρίβεια εκτίμησής τους. Αφορμή για την πραγματοποίηση αυτών των πειραμάτων στάθηκε η αρχική επιλογή της τιμής της by. Υπενθυμίζεται ότι σε όλα τα προηγούμενα πειράματα είχε επιλεγεί μηδενική τιμή για την κατά Y συνιστώσα της βάσης και διαφορετικές τιμές για τις τρεις στροφές. Παράλληλα, στα αποτελέσματα, και ειδικότερα στα διαγράμματα των απόλυτων διαφορών μεταξύ πραγματικών και εκτιμώμενων τιμών, παρατηρήθηκε ότι οι υπολογιζόμενες διαφορές για την bz (μη μηδενική συνιστώσα) ήταν πολύ μεγαλύτερες από ό,τι οι διαφορές για την by. Έτσι, ο στόχος της τρίτης ενότητας πειραμάτων ήταν να διαπιστωθεί αν και κατά πόσον οι προαναφερθείσες διαφορές οφείλονταν στις συγκεκριμένες τιμές που είχαν επιλεγεί για τις δύο συνιστώσες. Εκτός από το παραπάνω, τα πειράματα αυτά αποσκοπούσαν και σε κάτι ακόμα. Έχει ήδη προαναφερθεί ότι ο τρόπος ορισμού του συστήματος αναφοράς δεν έχει σημασία στην περίπτωση των σφαιρικών εικόνων, με την έννοια ότι όλοι οι άξονες (και άρα και οι στροφές περί αυτούς) είναι ισοδύναμοι στον ορισμό του προβλήματος του σχετικού προσανατολισμού λόγω της ομοιόμορφης κατανομής των σημείων σε όλες τις διευθύνσεις. Υπό αυτή την οπτική θα ανέμενε κανείς η ακρίβεια εκτίμησης των στροφών να είναι παρόμοια και για τις τρεις, δηλαδή ότι καμία στροφή δεν είναι πιο αβέβαιη από την άλλες. Παρ' όλα αυτά, από τα προηγούμενα πειράματα διαπιστώθηκαν και διαφοροποιήσεις μεταξύ της ακρίβειας των στροφών, οι οποίες όμως πιθανολογήθηκε ότι οφείλονται σε αριθμητικούς λόγους και όχι σε γεωμετρικούς.

Προς επιβεβαίωση των παραπάνω, στα πειράματα αυτά επιλέχθηκαν ίσες τιμές για τις δύο σχετικές συνιστώσες τις βάσης και ίσες τιμές για τις τρεις στροφές. Επιπλέον πειράματα έγιναν με μηδενικές τιμές για ανά δύο εναλλάξ από τις τρεις στροφές, αλλά και με διαφορετικές τιμές για το μήκος της βάσης. Από τα αποτελέσματα παρατηρήθηκε ότι όταν οι συνιστώσες της βάσης ήταν ίσες προέκυπταν διαφοροποιήσεις στα υπολογιζόμενα μέτρα ακρίβειας, και κυρίως ότι αυξήθηκαν οι απόλυτες διαφορές και για την by (αλλά όχι για όλες τις εξισώσεις), ενώ ταυτόχρονα αυξήθηκε η αβεβαιότητα της στροφής ω. Όταν εκτός από ίσες τιμές για τις συνιστώσες της βάσης χρησιμοποιήθηκαν και ίσες τιμές για τις στροφές, τότε τα μέτρα ακρίβειας των στροφών είχαν μικρότερες διαφορές μεταξύ τους. Ταυτόχρονα παρατηρήθηκε ότι η αλλαγή των τιμών των στροφών δεν επηρέασε μόνο τις ακρίβειές τους αλλά και τις ακρίβειες των συνιστωσών της βάσης, με τρόπο όμως που έδειχνε να διαφοροποιείται ανάλογα με την εξίσωση. Όταν μηδενίστηκαν διαδοχικά οι τιμές των στροφών διαφοροποιήθηκαν και τα αποτελέσματα, χωρίς όμως οι διαφορές αυτές να είναι αριθμητικά σημαντικές ούτε να γίνονται με κάποιο συστηματικό τρόπο. Τέλος, όταν προηγήθηκε της μη γραμμικής επίλυσης στροφή της δεξιάς δέσμης ακτίνων με βάση τις τιμές των στροφών που προέκυψαν από την γραμμική λύση τα αποτελέσματα και πάλι διαφοροποιήθηκαν. Το τελευταίο, σε συνδυασμό και με όλα τα προηγηθέντα, αποτελεί την πιο ισχυρή ένδειξη ότι πίσω από τις παρατηρούμενες μεταβολές δεν υπάρχει κάποια αιτία που να συνδέεται με την γεωμετρία του προβλήματος, οπότε οι διαφοροποιήσεις αποδίδονται μόνο στην αριθμητική επίλυση.

Επισκόπηση

Κίνητρο της παρούσας εργασίας ήταν η ολοένα αυξανόμενη χρήση των πανοραμικών εικόνων και το επιχείρημα που διατυπώνεται στην βιβλιογραφία ότι η χρήση τους συμβάλλει στην σταθεροποίηση της επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού. Από την άλλη πλευρά, η επίλυση του σχετικού προσανατολισμού είναι μια διαδικασία που συναντάται είτε αυτόνομα είτε ως αναπόσπαστο κομμάτι άλλων εφαρμογών όπως οι εφαρμογές SLAM και SfM. Για παράδειγμα, η επίλυση του σχετικού μπορεί να αποσκοπεί απλώς στον προσανατολισμό ενός στερεοζεύγος αλλά και στην εύρεση αρχικών τιμών για τον προσανατολισμό μεγάλου αριθμού εικόνων μέσω της συνόρθωσης δέσμης (bundle adjustment). Έτσι, η ευρεία χρήση των πανοραμικών εικόνων, σε συνδυασμό με το ότι ο σχετικός προσανατολισμός αποτελεί θεμελιώδη φωτογραμμετρική διαδικασία, δημιουργεί το κατάλληλο πλαίσιο για την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας. Στόχος της ήταν να δοθούν αρχικά τα βασικά στοιχεία σχετικά με την γεωμετρία και τις εφαρμογές των σφαιρικών εικόνων, να περιγραφούν όλες οι απαιτούμενες έννοιες για την κατανόηση του προβλήματος του σχετικού προσανατολισμού και του μοντέλου της επιπολικής γεωμετρίας, και, τέλος, να πραγματοποιηθεί μια σειρά πειράματα με προσομοιωμένα δεδομένα για να αξιολογηθούν διαφορετικές συναρτήσεις σφάλματος υπό την επίδραση διαφορετικών παραμέτρων.

Κατ' αρχάς, η αξιοποίηση των πανοραμικών εικόνων στις συνήθεις φωτογραμμετρικές διαδικασίες απαιτεί την κατανόηση του σφαιρικού μοντέλου και των διαφορών του με το μοντέλο της κεντρικής προβολής των συμβατικών εικόνων. Έτσι, το σφαιρικό μοντέλο χαρακτηρίστηκε ως μια γενικευμένη έκφραση όλων των μηχανών με ένα μοναδικό σημείο λήψης *(Torii & Imiya, 2007)* καθώς ο ορισμός της δέσμης των οπτικών ακτίνων στην περίπτωση της σφαίρας απαιτεί αποκλειστικά τον ορισμό του σημείου λήψης. Χρήσιμη παρατήρηση αποτελεί η απουσία της σταθεράς της μηχανής από την μαθηματική έκφραση του σφαιρικού μοντέλου, η οποία μπορεί να ληφθεί υπόψη κατά το στάδιο σύνθεσης των επιμέρους εικόνων για τη δημιουργία του σφαιρικού πανοράματος αλλά από τη στιγμή που θα δημιουργηθεί αυτό, η γεωμετρία της δέσμης των ακτίνων είναι ανεξάρτητη της ακτίνας της σφαίρας.

Με βάση τα παραπάνω, και κυρίως την διατύπωση ότι το σφαιρικό μοντέλο αποτελεί μια γενίκευση της κεντρικής προβολής στο επίπεδο, έγινε αντιληπτό ότι όσα ισχύουν στην κλασική φωτογραμμετρία θα ισχύουν και για τις πανοραμικές εικόνες, με ορισμένες όμως διαφοροποιήσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι διαφορές μεταξύ πανοραμικών και συμβατικών εικόνων σε σχέση με το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας και με τις δυνατότητες τρισδιάστατης ανακατασκευής. Έτσι, σχετικά με το μοντέλο της επιπολικής γεωμετρίας ως διαφορές αναφέρονται η ύπαρξη δύο πόλων σε ένα σφαιρικό πανόραμα αλλά και η μορφή των επιπολικών γραμμών που αποτελούν μέγιστους κύκλους στην επιφάνεια της σφαίρας. Ο υπολογισμός του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και στις δύο περιπτώσεις, με τη μόνη διαφορά να υπάρχει στις ομογενείς συντεταγμένες των ομόλογων σημείων που θα χρησιμοποιηθούν. Έτσι, ενώ στις συμβατικές εικόνες η τρίτη συνιστώσα δεσμεύεται ίση με την σταθερά της μηχανής, στην περίπτωση των σφαιρικών πανοραμάτων χρησιμοποιούνται απευθείας οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες με αναφορά στη μοναδιαία σφαίρα. Ενδιαφέρον, τέλος, παρουσιάζει το γεγονός ότι στην περίπτωση των σφαιρικών πανοραμάτων δεν απαιτείται η συνήθης κανονικοποίηση των συντεταγμένων των σημείων ώστε να αναφέρονται στο κέντρο βάρους των παρατηρήσεων καθώς, εξ ορισμού, τα σημεία πάνω στη σφαίρα έχουν αντίστοιχη σχέση με το κέντρο της.

Αναφορικά με τις εφαρμογές των πανοραμικών εικόνων έγινε προσπάθεια ομαδοποίησής τους σε συγκεκριμένες κατηγορίες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα πανοράματα φαίνεται να υπάρχει σε εφαρμογές SLAM και SfM, γεγονός που είναι απόλυτα λογικό με δεδομένο ότι η γεωμετρία των πανοραμάτων είναι πλεονεκτικότερη για τον προσανατολισμό των εικόνων. Έτσι, στις εφαρμογές Visual SLAM η χρήση των πανοραμικών εικόνων σε συνδυασμό με την θεώρηση οριζόντιας κίνησης αποτελεί συχνή πρακτική που αποσκοπεί στην μείωση του σωρευτικού σφάλματος όσο αυξάνει το μήκος της διαδρομής, σφάλμα που αποτελεί και το σημαντικότερο ίσως πρόβλημα του SLAM. Από την άλλη πλευρά, στις εφαρμογές SfM οι πανοραμικές εικόνες χρησιμοποιούνται προκειμένου να μειωθεί ο αριθμός των εικόνων και να περιοριστεί η ευαισθησία υπολογισμού του **E** στον θόρυβο των μετρήσεων. Στις εφαρμογές αυτές, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορετικές προσεγγίσεις που υιοθετούνται για τον υπολογισμό των αρχικών τιμών για τον πίνακα στροφής και το διάνυσμα της μετάθεσης, όπου γίνεται προσπάθεια αυτά να υπολογίζονται ξεχωριστά. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το επιχείρημα ότι η βασική αιτία αστάθειας της επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού μέσω του **E** είναι η σύνθετη σχέση που υπάρχει μεταξύ στροφής και μετάθεσης και η αδυναμία του ορθού διαχωρισμού τους που προκύπτει πολλές φορές.

Στο πρακτικό μέρος της εργασίας υλοποιήθηκαν στο MATLAB όλες οι απαιτούμενες συναρτήσεις για τα επιμέρους στάδια της διαδικασίας, από την δημιουργία των δεδομένων και την προσθήκη θορύβου σε αυτά έως και την μη γραμμική επίλυση επτά διαφορετικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των άγνωστων στροφών και της διεύθυνσης της βάσης του στερεοζεύγους. Να σημειωθεί ότι η χρήση προσομοιωμένων αντί πραγματικών δεδομένων κρίθηκε σκόπιμη ώστε να είναι ευκολότερα διαθέσιμα τα αληθή δεδομένα για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, να μπορούν να γίνουν περισσότερα πειράματα με μεταβολή των παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων αλλά και να μην υπάρχουν πρόσθετα σφάλματα από το στάδιο της αυτόματης εύρεσης ομόλογων σημείων στις πανοραμικές εικόνες, που όπως αναφέρθηκε αποτελεί μέχρι σήμερα ένα ανοικτό ερευνητικό ζήτημα. Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναδείχθηκαν ως καλύτερες συναρτήσεις οι $\boldsymbol{\varepsilon_p}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_t}$, ενώ η συνάρτηση $\boldsymbol{\varepsilon_{gold}}$ φάνηκε ότι δεν είναι η καταλληλότερη για χρήση σε σφαιρικές εικόνες. Τέλος, επιβεβαιώθηκε ότι η κατανομή σημείων σε όλες τις διευθύνσεις του χώρου πράγματι συμβάλλει στην αύξηση της ακρίβειας επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού και ειδικά της εκτίμησης των στροφών.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Αδιαμφισβήτητα οι πανοραμικές εικόνες «ήρθαν για να μείνουν», γεγονός που φαίνεται τόσο από την ραγδαία αύξηση των πανοραμικών δεδομένων και μηχανών όσο και των εφαρμογών τους. Εξίσου αδιαμφισβήτητη είναι η ολοένα αυξανόμενη τάση για τον προσανατολισμό μεγάλου αριθμού εικόνων σε πραγματικό χρόνο, πράγμα που απαιτεί την εύρεση γραμμικών εξισώσεων ανθεκτικών στην επίδραση του θορύβου και στην ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων, αλλά και ικανών να διαχειριστούν κρίσιμες περιπτώσεις από την πλευρά της γεωμετρίας των λήψεων.

Μολονότι τα πειράματα που έγιναν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δεν ήταν λίγα, υπάρχουν και άλλες προφανώς παράμετροι που θα μπορούσαν να διερευνηθούν. Κατ' αρχάς τα πειράματα σχετικά με την επίδραση των παραμέτρων του προσανατολισμού της δεξιάς εικόνας θα μπορούσαν να επαναληφθούν για περισσότερες τιμές και με πιο συστηματικό τρόπο ώστε να υπάρξει πιο ξεκάθαρη εικόνα της σχέσης μεταξύ των τιμών των στροφών με τις συνιστώσες της βάσης.

Επιπλέον, στο μέλλον θα μπορούσε να εξεταστεί η συμπεριφορά των επιμέρους συναρτήσεων και στην κρίσιμη περίπτωση της πολύ μικρής βάσης που τείνει στην μηδενική. Να σημειωθεί ότι η περίπτωση της μηδενικής μετάθεσης δεν είναι απλώς μια θεωρητική υπόθεση αλλά ένα πραγματικό πρόβλημα που συναντάται κυρίως σε εφαρμογές πλοήγησης όταν το κινούμενο μέσο απλώς στρέφεται.

Μία άλλη παράμετρος που δεν μελετήθηκε εδώ αλλά έχει ενδιαφέρον είναι το πλήθος των χρησιμοποιούμενων σημείων. Συγκεκριμένα, σε όλα τα εδώ πειράματα χρησιμοποιήθηκε μεγάλος αριθμός παρατηρήσεων και μάλιστα πολύ μεγαλύτερος από τον ελάχιστο απαιτούμενο. Στο μέλλον θα μπορούσε να διερευνηθεί η συμπεριφορά των συναρτήσεων σφάλματος ως προς τον αριθμό των σημείων με το να εξεταστεί και η κρίσιμη περίπτωση του ελάχιστου πλήθους. Τέτοια πειράματα για άλλες εξισώσεις έχουν παρουσιάσει οι *Fujiki (2008)* και *Kneip & Lynen (2013)*, και μάλιστα ο πρώτος καταλήγει σε βέλτιστη συνάρτηση διαφορετική όταν εξετάζει την επίδραση του θορύβου και διαφορετική όταν εξετάζει την επίδραση του πλήθυς των σημείων.

Μια ακόμη παράμετρος που εξετάζεται συχνά και συνδέεται άμεσα με πραγματικές εφαρμογές είναι η ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων στις παρατηρήσεις. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, οι επιμέρους συναρτήσεις αξιολογήθηκαν ως προς την επίδραση του θορύβου αλλά ο θόρυβος που εφαρμόστηκε ακολουθούσε το μοντέλο της κανονικής κατανομής. Σε πραγματικές συνθήκες, στα ομόλογα σημεία δεν υπάρχουν μόνο τυχαία σφάλματα αλλά και χονδροειδή, τα οποία μπορεί να επηρεάσουν την εκτίμηση αρχικών τιμών μέσω της γραμμικής επίλυσης του **E**. Υπό αυτήν την έννοια, θα μπορούσε να εξετάσει κανείς την ευαισθησία κάθε μίας μη γραμμικής συνάρτησης ως προς τις αρχικές τιμές των αγνώστων.

Τέλος, σε όλες τις εφαρμογές που χρησιμοποιούνται πανοραμικές εικόνες προκύπτει το πρόβλημα της αυτόματης συνταύτισης, το οποίο μέχρι και σήμερα εξακολουθεί να αποτελεί ένα ανοικτό ερευνητικό ζήτημα. Είναι γεγονός ότι οι ευρέως χρησιμοποιούμενοι σημειακοί τελεστές στις συμβατικές εικόνες δεν έχουν τα ίδια αποτελέσματα στις πανοραμικές λόγω της δυσκολίας τους να διαχειριστούν τις μεγάλες και μη γραμμικές παραμορφώσεις (βλ. ενδεικτικά *Boussias et al., 2016*). Προφανώς, τα ποσοστά επιτυχίας ενός τελεστή συνδέονται άμεσα με την βάση του στερεοζεύγους αλλά και με την χρησιμοποιούμενη προβολή. Έτσι, στις περισσότερες περιπτώσεις οι βάσεις διατηρούνται μικρές για τις σφαιρικές εικόνες με ό,τι αυτό συνεπάγεται για την γεωμετρία των λήψεων και την ακρίβεια της τρισδιάστατης ανακατασκευής. Επίσης, συχνά χρησιμοποιούνται προβολές που διευκολύνουν την εύρεση ομόλογων σημείων, όπως το κυβικό πανόραμα, ή αφαιρούνται τμήματα της εικόνας με πολύ μεγάλες παραμορφώσεις (το άνω και κάτω τμήμα της σφαίρας). Στο πλαίσιο αυτό, η μελέτη διαφορετικών συναρτήσεων επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να γίνει σε πραγματικά δεδομένα, σε συνάρτηση με την χρήση διαφορετικών τελεστών αυτόματης συνταύτισης αλλά και διαφορετικών χαρτογραφικών προβολών. Αν και το τελευταίο αφορά πρωτίστως το στάδιο υπολογισμού του **E** και όχι τις διαφορετικές μη γραμμικές συναρτήσεις σφάλματος, κρίθηκε σκόπιμο να αναφερθεί εδώ καθώς εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο της επίλυσης του σχετικού προσανατολισμού σφαιρικών εικόνων. Επιπλέον, σε αυτό το ευρύτερο πλαίσιο μελέτης του σχετικού προσανατολισμού μπορεί να ενταχθεί και η διερεύνηση χρήσης της επιπολικής δέσμευσης σε πολυεικονικές εφαρμογές. Όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, η εξίσωση της συνεπιπεδότητας εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και σε «κρίσιμες γεωμετρίες» στις οποίες η γνωστή συνθήκη συγγραμμικότητας εξασθενεί. Με βάση το τελευταίο η αναζήτηση μίας μαθηματικής έκφρασης της δέσμευσης της συνεπιπεδότητας για περισσότερες από δύο εικόνων αποκτά ιδιαίτερη σημασία ως μία εναλλακτική στην ευρέως διαδεδομένη συνόρθωση δέσμης για τον ταυτόχρονο προσανατολισμό πολλών εικόνων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Agarwal, P., Burgard, W., Spinello, L. (2015). Metric localization using Google street view. *IEEE/RSJ International Conference* on *Intelligent Robots and Systems (IROS),* pp. 3111-3118.

Aly, M., Bouguet, J. Y. (2012). Street view goes indoors: Automatic pose estimation from uncalibrated unordered spherical panoramas. In *IEEE Workshop* on *Applications of Computer Vision (WACV),* pp. 1-8).

Boussias-Alexakis, E., Tsironis, V., Petsa, E., Karras G. (2016) .Automatic adjustment of wide-base GOOGLE STREET VIEW panoramas. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, vol. XLI-B1, pp. 639-645.

Briales, J., Kneip, L., Gonzalez-Jimenez, J. (2018). A certifiably globally optimal solution to the non-minimal relative pose problem. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*,pp. 145-154.

Fathy, M. E., Hussein, A. S., Tolba, M. F. (2011). Fundamental matrix estimation: A study of error criteria. *Pattern Recognition Letters*, 32(2), 383-391.

Fermüller, C., Aloimonos, Y. (1998). Ambiguity in structure from motion: Sphere versus plane. *International Journal of Computer Vision*, 28(2), 137-154.

Fujiki, J. (2008). Three types of reprojection error on spherical epipolar geometry. *8th Workshop on Omnidirectional Vision, Camera Networks and Non-classical Cameras (OMNIVIS)*.

Furukawa, Y., Ponce, J. (2010). Accurate, dense, and robust multiview stereopsis. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *32*(8), 1362-1376.

Gluckman, J., Nayar, S. K. (1998). Ego-motion and omnidirectional cameras. *6th International Conference on Computer Vision*, pp. 999-1005.

Hartley, R. I. (1995). In defence of the 8-point algorithm. *5th International Conference on Computer Vision*, pp. 1064-1070.

Hartley, R., Zisserman, A. (2000). Multiple View Geometry in Computer Vision. *Cambridge University Press*.

Kang, S. B., Szeliski, R. (1997). 3-D scene data recovery using omnidirectional multibaseline stereo. *International Journal of Computer Vision*, 25(2), 167-183.

Kangni, F., Laganiere, R. (2007). Orientation and pose recovery from spherical panoramas. *IEEE 11th International Conference on Computer Vision,* pp. 1-8.

Klingner, B., Martin, D., Roseborough, J. (2013). Street view motion-from-structure-from-motion. *IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 953-960.

Kneip, L., Siegwart, R., Pollefeys, M. (2012). Finding the exact rotation between two images independently of the translation. *European Conference on Computer Vision*, Springer, pp. 696-709. Berlin, Heidelberg.

Kneip, L., Lynen, S. (2013). Direct optimization of frame-to-frame rotation. *IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 2352-2359.

Lim, J., Barnes, N., Li, H. (2010). Estimating relative camera motion from the antipodal-epipolar constraint. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine intelligence*, 32(10), 1907-1914.

Longuet-Higgins, H.C., 1981. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293, pp. 133-135.

Lourakis, M. I., Argyros, A. A. (2009). SBA: A software package for generic sparse bundle adjustment. ACM Transactions on Mathematical Software *(TOMS)*, *36*(1), no. 2.

Micusik, B., Kosecka, J. (2009). Piecewise planar city 3D modeling from street view panoramic sequences. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,* pp. 2906-2912.

Nelson, R. C., Aloimonos, J. (1988). Finding motion parameters from spherical motion fields (or the advantages of having eyes in the back of your head). *Biological Cybernetics*, *58*(4), 261-273.

Pagani, A., Gava, C. C., Cui, Y., Krolla, B., Hengen, J. M., Stricker, D. (2011). Dense 3D point cloud generation from multiple high-resolution spherical images. Proc. *VAST*, pp. 17-24.

Pagani, A., Stricker, D. (2011). Structure from motion using full spherical panoramic cameras. *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV Workshops,* pp. 375-382.

Pathak, S., Moro, A., Yamashita, A., Asama, H. (2016). A decoupled virtual camera using spherical optical flow. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 4488-4492.

Pathak, S., Moro, A., Fujii, H., Yamashita, A., Asama, H. (2016). 3D reconstruction of structures using spherical cameras with small motion. *16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS),* pp. 117-122.

Sato, T., Pajdla, T., Yokoya, N. (2011). Epipolar geometry estimation for wide-baseline omnidirectional street view images. *IEEE International Conference on Computer Vision*, *ICCV Workshops*, pp. 56-63,.

Scaramuzza, D., Siegwart, R. (2008). Appearance-guided monocular omnidirectional visual odometry for outdoor ground vehicles. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5), 1015-1026.

Scaramuzza, D., Fraundorfer, F. (2011). Visual odometry [tutorial]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, *18*(4), 80-92.

Schneider, J., Läbe, T., Förstner, W. (2013). Incremental real-time bundle adjustment for multi-camera systems with points at infinity. *ISPRS Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XL-1/W2, pp. 355-360.

Shum, H. Y., Han, M., Szeliski, R. (1998). Interactive construction of 3D models from panoramic mosaics. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,* pp. 427-433.

Stewenius, H., Engels, C., Nistér, D. (2006). Recent developments on direct relative orientation. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 60(4), 284-294.

Svoboda, T., Pajdla, T., Hlaváč, V. (1998). Epipolar geometry for panoramic cameras. *European Conference on Computer Vision*, Springer, pp. 218-231.

Tardif, J. P., Pavlidis, Y., Daniilidis, K. (2008). Monocular visual odometry in urban environments using an omnidirectional camera. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems,* pp. 2531-2538.

Tong, G., Chen, X., Ye, N. (2014). A spherical model based keypoint descriptor and matching algorithm for omnidirectional images. *Advances in Mechanical Engineering*, *6*, no. 154376.

Torii, A., Imiya, A., Ohnishi, N. (2005). Two-and three-view geometry for spherical cameras. *6th Workshop on Omnidirectional Vision, Camera Networks and Non-classical Cameras* (*OMNIVIS)*, .

Torii, A., Imiya, A. (2007). Computation of epipolar geometry and trifocal tensor from spherical images. *Computer Vision Winter Workshop* (on CD-ROM)

Torii, A., Havlena, M. (2009). From google street view to 3d city models. *IEEE 12th international conference on Computer Vision*, *ICCV Workshops*, pp. 2188-2195.

Tsai, V. J., Chang, C. T. (2013). Three-dimensional positioning from Google street view panoramas. *IET Image Processing*, 7(3), 229-239.

Zhang, Z. (1998). Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. *International Journal of Computer Vision*, 27(2), 161-195.

Αδάμ Α., (2011). *Γεωμετρία του Στερεοζεύγους από Βαθμονομημένες και από μη Βαθμονομημένες Μηχανές*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ.

Καλησπεράκης, Η., 2010. *Η Επιπολική Γεωμετρία στον Προβολικό και τον Ευκλείδειο Χώρο*. Διδακτορική Διατριβή, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Τσιρώνης, Β. (2015). *Μελέτη της Γεωμετρίας των Σφαιρικών Πανοραμάτων*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.

Φλωρίδη Β., (2016). *Υλοποίηση και Αξιολόγηση Σημειακών Τελεστών για την Αυτόματη Αραιή Συνταύτιση Εικόνας σε Στερεοζεύγη*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Επίδραση γεωμετρίας)

Α. Απλή περίπτωση σφαιρικών εικόνων

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01971
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02701
0.02533
0.00930
0.01486
0.01616
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00004
-0.00046
-0.00029
0.00103
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 0.003 0.264
bz    0.000 1.000 -0.009 -0.255 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.034 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01971
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02701
0.02533
0.00930
0.01486
0.01616
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00004
-0.00046
-0.00029
0.00103
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 0.003 0.264
bz    0.000 1.000 -0.009 -0.255 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.034 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01926
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02810
0.02581
0.00855
```

```
0.01172
0.01365
0.00186
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00002
-0.00052
-0.00106
0.00110
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.265 0.004 0.344
bz    0.000 1.000 -0.010 -0.331 0.003
omega 0.000 0.000 1.000 0.027 -0.773
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01926
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02810
0.02581
0.00855
0.01172
0.01365
0.00186
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00002
-0.00052
-0.00106
0.00110
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.265 0.004 0.344
bz    0.000 1.000 -0.010 -0.331 0.003
omega 0.000 0.000 1.000 0.027 -0.773
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00146
# std total in deg: 0.01971
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02701
0.02533
0.00930
0.01486
0.01616
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00012
-0.00045
0.00009
0.00103
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 0.003 0.264
bz    0.000 1.000 -0.009 -0.255 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.034 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00148
# std total in deg: 0.02531
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
```

```
0.04120
0.02713
0.01307
0.01414
0.01991
0.00286
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00014
-0.00054
-0.00020
0.00078
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.000 -0.171 0.004 0.217
bz    0.000 1.000 -0.007 -0.230 0.003
omega 0.000 0.000 1.000 0.016 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.005
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00131
# std total in deg: 0.02119
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03562
0.02141
0.01070
0.00983
0.01743
0.00236
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00007
-0.00069
-0.00060
0.00096
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.076 -0.184 0.011 0.231
bz    0.000 1.000 0.000 -0.255 -0.005
omega 0.000 0.000 1.000 -0.061 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.082
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Β. Απλή περίπτωση συμβατικών εικόνων

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00160
# std total in deg: 0.06528
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.08654
0.04229
0.05641
0.01637
0.09254
0.01262
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00023
0.00161
-0.00025
-0.00628
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.443 -0.157 0.455
bz    0.000 1.000 0.270 -0.177 -0.090
omega 0.000 0.000 1.000 -0.034 -0.978
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.037
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
```

```
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00160
# std total in deg: 0.06528
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.08654
0.04229
0.05641
0.01637
0.09254
0.01262
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00023
0.00161
-0.00025
-0.00628
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.443 -0.157 0.455
bz    0.000 1.000 0.270 -0.177 -0.090
omega 0.000 0.000 1.000 -0.034 -0.978
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.037
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00142
# std total in deg: 0.06526
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.08941
0.04221
0.05537
0.01523
0.09057
0.01238
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00005
-0.00001
0.00299
-0.00072
-0.00544
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.004 -0.468 -0.147 0.482
bz    0.000 1.000 0.275 -0.210 -0.090
omega 0.000 0.000 1.000 -0.033 -0.977
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.033
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00142
# std total in deg: 0.06525
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.08941
0.04221
0.05537
0.01523
0.09056
0.01238
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00005
-0.00001
0.00299
-0.00072
-0.00544
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.004 -0.468 -0.147 0.482
bz    0.000 1.000 0.275 -0.210 -0.090
omega 0.000 0.000 1.000 -0.033 -0.977
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.033
```

```
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00192
# std total in deg: 0.06526
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.08653
0.04230
0.05638
0.01637
0.09250
0.01262
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00044
-0.00095
0.00024
-0.00490
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.443 -0.157 0.455
bz    0.000 1.000 0.270 -0.177 -0.089
omega 0.000 0.000 1.000 -0.034 -0.978
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.038
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00186
# std total in deg: 0.07021
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.09726
0.04067
0.06006
0.01558
0.09832
0.01349
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00017
0.00019
-0.01026
-0.00094
0.01899
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.019 -0.418 -0.221 0.429
bz    0.000 1.000 0.257 -0.176 -0.080
omega 0.000 0.000 1.000 -0.042 -0.980
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.045
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00204
# std total in deg: 0.07091
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.10138
0.04169
0.05854
0.01459
0.09733
0.01312
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00004
0.00017
0.00474
-0.00141
-0.00607
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.044 -0.441 -0.059 0.456
```

```
bz    0.000 1.000 0.268 -0.182 -0.090
omega 0.000 0.000 1.000 -0.145 -0.979
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.151
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Γ. Περίπτωση σφαιρικών με σημεία σε μεγάλες αποστάσεις

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00123
# std total in deg: 0.09141
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.14787
0.13900
0.00932
0.01496
0.01621
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
-0.00160
0.00045
0.00023
-0.00106
# Correlation matrix:
           by     bz    omega  phi   kappa
by    1.000 0.001 -0.041 -0.000 0.049
bz    0.000 1.000 -0.004 -0.050 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.035 -0.849
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00123
# std total in deg: 0.09141
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.14787
0.13900
0.00932
0.01496
0.01621
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
-0.00160
0.00045
0.00023
-0.00106
# Correlation matrix:
           by     bz    omega  phi   kappa
by    1.000 0.001 -0.041 -0.000 0.049
bz    0.000 1.000 -0.004 -0.050 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.035 -0.849
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.09210
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.15067
0.13889
0.00850
0.01170
0.01358
0.00185
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00008
0.00032
```

```
-0.00058
-0.00081
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.000 -0.049 0.001 0.062
bz    0.000 1.000 -0.003 -0.060 -0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.028 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.010
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.09210
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.15067
0.13889
0.00850
0.01170
0.01358
0.00185
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00008
0.00032
-0.00058
-0.00081
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.000 -0.049 0.001 0.062
bz    0.000 1.000 -0.003 -0.060 -0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.028 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.010
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00147
# std total in deg: 0.09154
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.14794
0.13933
0.00932
0.01499
0.01623
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00383
0.00047
0.00064
-0.00106
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.001 -0.041 -0.000 0.049
bz    0.000 1.000 -0.004 -0.050 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.035 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00659
# std total in deg: 0.58226
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.05795
0.74577
0.05976
0.06378
0.09287
0.01309
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
```

```
0.00010
0.00260
0.00000
-0.00250
0.00004
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.002 -0.031 0.003 0.039
bz    0.000 1.000 -0.004 -0.040 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.016 -0.830
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.001
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00132
# std total in deg: 0.10279
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.19628
0.11728
0.01068
0.00986
0.01739
0.00235
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00006
0.00075
0.00063
-0.00077
-0.00118
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.079 -0.033 0.003 0.040
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.044 -0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.058 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.082
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Δ. Περίπτωση συμβατικών με σημεία σε μεγάλες αποστάσεις

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00159
# std total in deg: 0.33498
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.43802
0.59621
0.06670
0.01646
0.09336
0.01474
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00016
-0.04033
-0.09989
0.00173
0.05321
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.076 -0.211 0.089
bz    0.000 1.000 0.637 -0.045 -0.247
omega 0.000 0.000 1.000 -0.046 -0.900
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.044
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00159
# std total in deg: 0.33498
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.43802
0.59621
```

```
0.06670
0.01646
0.09336
0.01474
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00016
-0.04033
-0.09989
0.00173
0.05321
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.076 -0.211 0.089
bz    0.000 1.000 0.637 -0.045 -0.247
omega 0.000 0.000 1.000 -0.046 -0.900
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.044
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00141
# std total in deg: 0.32924
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.44550
0.57443
0.06697
0.01522
0.09225
0.01458
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00032
0.00057
0.00351
-0.00005
-0.00477
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.084 -0.203 0.097
bz    0.000 1.000 0.613 -0.053 -0.235
omega 0.000 0.000 1.000 -0.049 -0.908
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.043
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00141
# std total in deg: 0.32924
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.44550
0.57444
0.06698
0.01522
0.09226
0.01458
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00032
0.00057
0.00351
-0.00005
-0.00477
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.084 -0.203 0.097
bz    0.000 1.000 0.614 -0.053 -0.235
omega 0.000 0.000 1.000 -0.049 -0.908
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.043
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00186
# std total in deg: 0.34941
# std errors:
```

```
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.44879
0.62862
0.06667
0.01681
0.09372
0.01493
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00037
-0.07911
-0.20454
0.00354
0.11824
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.006 -0.070 -0.210 0.086
bz    0.000 1.000 0.669 -0.048 -0.261
omega 0.000 0.000 1.000 -0.049 -0.888
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.047
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00160
# std total in deg: 0.36799
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.52486
0.62089
0.07314
0.01613
0.10045
0.01582
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00044
0.06217
0.09807
-0.00204
0.00340
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.002 -0.075 -0.277 0.084
bz    0.000 1.000 0.538 -0.041 -0.155
omega 0.000 0.000 1.000 -0.045 -0.913
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.042
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00202
# std total in deg: 0.35596
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.52183
0.58763
0.07192
0.01474
0.10064
0.01553
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00104
0.03828
0.08886
-0.00268
-0.04082
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.020 -0.078 -0.146 0.112
bz    0.000 1.000 0.562 -0.065 -0.185
omega 0.000 0.000 1.000 -0.147 -0.914
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.153
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

Ε1.Περίπτωση σφαιρικών και σημεία στην περιοχή της βάσης

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00022
# std total in deg: 0.02419
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02894
0.02528
0.03534
0.00719
0.01212
0.00709
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
-0.00003
0.00194
0.00014
-0.00059
# Correlation matrix:
          by     bz    omega  phi   kappa
by     1.000 -0.003 -0.018 0.003 0.087
bz     0.000 1.000 -0.003 -0.123 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.054 -0.811
phi    0.000 0.000 0.000 1.000 0.038
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00022
# std total in deg: 0.02419
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02894
0.02528
0.03534
0.00719
0.01212
0.00709
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
-0.00003
0.00194
0.00014
-0.00059
# Correlation matrix:
          by     bz    omega  phi   kappa
by     1.000 -0.003 -0.018 0.003 0.087
bz     0.000 1.000 -0.003 -0.123 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.054 -0.811
phi    0.000 0.000 0.000 1.000 0.038
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.02700
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03156
0.02543
0.04200
0.00710
0.01365
0.00842
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00004
0.00036
-0.00018
-0.00016
# Correlation matrix:
          by     bz    omega  phi   kappa
by     1.000 -0.002 -0.039 0.004 0.225
bz     0.000 1.000 -0.002 -0.349 0.003
```

```
omega 0.000 0.000 1.000 -0.069 -0.831
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.053
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.02700
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03156
0.02543
0.04200
0.00710
0.01365
0.00842
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00004
0.00036
-0.00018
-0.00016
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.002 -0.039 0.004 0.225
bz    0.000 1.000 -0.002 -0.349 0.003
omega 0.000 0.000 1.000 -0.069 -0.831
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.053
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00026
# std total in deg: 0.02419
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02894
0.02528
0.03534
0.00719
0.01211
0.00709
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
-0.00011
0.00187
0.00023
-0.00057
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.003 -0.018 0.003 0.087
bz    0.000 1.000 -0.003 -0.123 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.054 -0.811
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.038
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.03639
# std total in deg: 0.86186
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.00321
0.68203
1.40437
0.18434
0.46293
0.28171
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00006
0.00023
0.00289
-0.00182
-0.00176
# Correlation matrix:
```

```
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.009 -0.018 0.007 0.079
bz    0.000 1.000 0.003 -0.115 -0.011
omega 0.000 0.000 1.000 -0.098 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.078
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00141
# std total in deg: 0.02896
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03779
0.02133
0.04507
0.00597
0.01558
0.00904
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00007
-0.00277
-0.00024
0.00048
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.091 -0.019 -0.008 0.099
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.210 0.007
omega 0.000 0.000 1.000 -0.096 -0.812
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.129
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Ε2.Περίπτωση σφαιρικών και σημεία στην περιοχή της βάσης μόνο από τη μία πλευρά

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00022
# std total in deg: 0.04972
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07633
0.06632
0.03696
0.01705
0.02179
0.00749
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
-0.00031
-0.00308
0.00243
0.00092
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.284 0.004 0.846
bz    0.000 1.000 -0.011 -0.925 0.016
omega 0.000 0.000 1.000 -0.015 -0.666
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00022
# std total in deg: 0.04972
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07633
0.06632
0.03696
0.01705
0.02179
0.00749
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
```

```
-0.00031
-0.00308
0.00243
0.00092
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.284 0.004 0.846
bz    0.000 1.000 -0.011 -0.925 0.016
omega 0.000 0.000 1.000 -0.015 -0.666
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00155
# std total in deg: 0.04983
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07677
0.06174
0.04345
0.01644
0.02320
0.00878
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00001
-0.00177
-0.00011
0.00050
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.002 -0.252 0.007 0.828
bz    0.000 1.000 -0.009 -0.926 0.013
omega 0.000 0.000 1.000 -0.023 -0.675
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00155
# std total in deg: 0.04983
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07677
0.06174
0.04345
0.01644
0.02320
0.00878
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00001
-0.00177
-0.00011
0.00050
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.002 -0.252 0.007 0.828
bz    0.000 1.000 -0.009 -0.926 0.013
omega 0.000 0.000 1.000 -0.023 -0.675
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00026
# std total in deg: 0.04973
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07633
0.06634
0.03695
0.01706
0.02178
```

```
0.00749
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
-0.00078
-0.00282
0.00629
0.00075
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.284 0.004 0.846
bz    0.000 1.000 -0.011 -0.925 0.016
omega 0.000 0.000 1.000 -0.015 -0.665
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.02593
# std total in deg: 1.46922
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
2.03804
1.89764
1.06416
0.42562
0.60776
0.23043
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00221
0.01683
0.00258
0.13559
0.01683
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.010 -0.262 0.018 0.805
bz    0.000 1.000 -0.011 -0.888 0.006
omega 0.000 0.000 1.000 -0.032 -0.699
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.022
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00146
# std total in deg: 0.05571
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.09780
0.05250
0.04717
0.01361
0.02775
0.00957
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
0.00014
-0.00455
-0.00109
0.00092
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.127 -0.280 0.123 0.839
bz    0.000 1.000 0.025 -0.921 -0.093
omega 0.000 0.000 1.000 -0.065 -0.670
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.123
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

E3. Περίπτωση σφαιρικών και σημεία στην περιοχή της βάσης μόνο από τη μία πλευρά

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00021
```

```
# std total in deg: 0.04079
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.05970
0.05194
0.03627
0.01673
0.02140
0.00735
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00023
-0.00090
-0.00274
0.00015
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.002 0.272 -0.009 -0.805
bz    0.000 1.000 0.008 0.880 -0.010
omega 0.000 0.000 1.000 -0.020 -0.667
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00021
# std total in deg: 0.04079
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.05970
0.05194
0.03627
0.01673
0.02140
0.00735
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00023
-0.00090
-0.00274
0.00015
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.002 0.272 -0.009 -0.805
bz    0.000 1.000 0.008 0.880 -0.010
omega 0.000 0.000 1.000 -0.020 -0.667
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.04276
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.06325
0.05094
0.04248
0.01551
0.02208
0.00858
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00002
-0.00027
-0.00042
-0.00016
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.002 0.231 -0.007 -0.774
bz    0.000 1.000 0.007 0.872 -0.011
omega 0.000 0.000 1.000 -0.027 -0.679
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

```
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.04276
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.06325
0.05094
0.04248
0.01551
0.02208
0.00858
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00002
-0.00027
-0.00042
-0.00016
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.002 0.231 -0.007 -0.774
bz    0.000 1.000 0.007 0.872 -0.011
omega 0.000 0.000 1.000 -0.027 -0.679
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.011
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00026
# std total in deg: 0.04079
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.05970
0.05195
0.03626
0.01673
0.02139
0.00735
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
-0.00051
-0.00103
-0.00546
0.00023
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.002 0.272 -0.009 -0.805
bz    0.000 1.000 0.008 0.880 -0.010
omega 0.000 0.000 1.000 -0.020 -0.666
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.007
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.02194
# std total in deg: 1.00735
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.32523
1.25431
0.89957
0.40935
0.50290
0.18409
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00188
0.00409
-0.02710
-0.21033
0.04335
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.004 0.239 0.001 -0.765
bz    0.000 1.000 0.014 0.841 -0.015
omega 0.000 0.000 1.000 -0.024 -0.693
```

```
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.005
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00135
# std total in deg: 0.04576
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.07471
0.04344
0.04592
0.01353
0.02640
0.00930
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00004
0.00017
-0.00048
0.00081
-0.00059
# Correlation matrix:
          by     bz    omega  phi   kappa
by    1.000 -0.065 0.259 -0.074 -0.791
bz    0.000 1.000 -0.013 0.871 0.048
omega 0.000 0.000 1.000 -0.055 -0.672
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.087
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

ΣΤ. Περίπτωση σφαιρικών εικόνων και σημεία στο άπειρο

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00120
# std total in deg: 0.60065
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.96806
0.92988
0.00903
0.01527
0.01643
0.00201
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00106
-0.07263
0.00059
0.00142
-0.00068
# Correlation matrix:
          by     bz    omega  phi   kappa
by    1.000 0.001 -0.009 0.000 0.012
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.012 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.038 -0.831
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.012
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00128
# std total in deg: 1.02669
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.40004
0.29179
0.00873
0.01177
0.01368
0.00190
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00917
-1.38771
0.00060
```

```
0.00061
-0.00055
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.010 -0.000 0.014
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.013 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.027 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.010
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00128
# std total in deg: 1.02669
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.40004
0.29179
0.00873
0.01177
0.01368
0.00190
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00917
-1.38771
0.00060
0.00061
-0.00055
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.010 -0.000 0.014
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.013 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.027 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.010
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00128
# std total in deg: 1.02669
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.40004
0.29179
0.00873
0.01177
0.01368
0.00190
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00917
-1.38771
0.00060
0.00061
-0.00055
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.010 -0.000 0.014
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.013 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.027 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.010
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00138
# std total in deg: 0.64630
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.98913
1.04524
0.00902
0.01629
0.01726
0.00202
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
```

```
-0.00098
-0.15821
0.00068
0.00205
-0.00078
# Correlation matrix:
           by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.000 -0.010 0.000 0.013
bz    0.000 1.000 -0.001 -0.013 0.000
omega 0.000 0.000 1.000 0.041 -0.803
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.012
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.34199
# std total in deg: 110.67348
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
220.55135
93.66292
1.33111
0.91755
1.91812
0.27599
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00314
-1.15114
-0.00091
-0.00058
-0.00388
# Correlation matrix:
           by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.014 -0.006 0.003 0.026
bz    0.000 1.000 -0.005 0.010 0.008
omega 0.000 0.000 1.000 -0.007 -0.311
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.001
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00132
# std total in deg: 1.18076
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
1.64849
-0.11795
0.01104
0.01001
0.01737
0.00243
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00847
-1.35184
0.00066
0.00100
-0.00049
# Correlation matrix:
           by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.075 -0.010 -0.000 0.012
bz    0.000 1.000 -0.000 -0.014 -0.000
omega 0.000 0.000 1.000 -0.061 -0.852
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.081
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Ζ. Περίπτωση συμβατικών εικόνων και σημεία στο άπειρο

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00142
# std total in deg: 1.76813
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
```

```
3.09612
2.42687
0.02949
0.02684
0.07570
0.00660
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00486
-0.46132
0.16942
0.13447
0.85425
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.023 -0.153 0.026
bz    0.000 1.000 0.724 -0.021 -0.115
omega 0.000 0.000 1.000 -0.007 -0.709
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.014
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00152
# std total in deg: 79.54003
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
2.09845
177.05274
0.03550
0.01422
0.05238
0.00773
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-21.78441
0.19085
0.20249
0.18475
0.64113
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.049 -0.014 -0.144 0.016
bz    0.000 1.000 0.184 0.061 -0.056
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.808
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.009
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00152
# std total in deg: 79.54105
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
2.09845
177.05491
0.03550
0.01422
0.05234
0.00773
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-21.78441
0.19085
0.20249
0.18475
0.64113
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.049 -0.014 -0.144 0.016
bz    0.000 1.000 0.183 0.061 -0.055
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.808
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.009
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00152
```

```
# std total in deg: 79.53980
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
2.09844
177.05212
0.03540
0.01422
0.05228
0.00772
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-21.78441
0.19085
0.20249
0.18475
0.64111
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.049 -0.014 -0.144 0.016
bz    0.000 1.000 0.183 0.061 -0.055
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.808
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.009
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00157
# std total in deg: 1.85698
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
3.12489
2.67655
0.03564
0.02493
0.07342
0.01893
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.02560
-0.54937
0.11256
0.20090
0.73366
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.008 -0.016 -0.133 0.021
bz    0.000 1.000 0.837 -0.019 -0.106
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.515
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.006
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 1.14980
# std total in deg: 25311310.81703
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
53.05881
-50710049.22350
0.29718
0.50050
1.28116
0.18327
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-50709.68817
12723.79520
-0.25639
0.03953
6.11992
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.113 0.007 -0.008 -0.111
bz    0.000 1.000 0.227 0.049 -0.008
omega 0.000 0.000 1.000 0.111 -0.200
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.053
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

```
 ------------------ ################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00161
# std total in deg: 55669161215.47942
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
20.46519
-121755481950.94920
0.04749
0.01771
0.03728
0.01001
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-75158.57892
-144673.01871
0.19603
0.18686
0.78433
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.034 0.045 -0.131 -0.028
bz    0.000 1.000 0.149 0.057 -0.048
omega 0.000 0.000 1.000 -0.019 -0.835
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.035
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

Η. Περίπτωση σφαιρικών εικόνων, σημεία στο άπειρο και ένα σημείο κοντά

```
------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00121
# std total in deg: 0.55342
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.81654
0.84703
0.01303
0.02136
0.02313
0.00290
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00066
-0.03267
-0.00011
0.00001
0.00062
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.008 -0.016 -0.003 0.016
bz    0.000 1.000 0.002 -0.012 -0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.037 -0.841
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00139
# std total in deg: 8.82465
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
7.91008
2.00624
0.01389
0.01766
0.02071
0.00301
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.01939
0.78379
0.00042
-0.00188
-0.00012
# Correlation matrix:
```

```
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.017 -0.015 -0.004 0.018
bz    0.000 1.000 -0.000 -0.010 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.025 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.005
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00139
# std total in deg: 8.82276
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
7.90528
2.01612
0.01389
0.01765
0.02071
0.00301
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.01939
0.78379
0.00041
-0.00186
-0.00011
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.017 -0.015 -0.004 0.018
bz    0.000 1.000 -0.000 -0.010 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.025 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.005
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00139
# std total in deg: 8.82820
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
7.91949
1.98677
0.01390
0.01766
0.02072
0.00301
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.01940
0.78379
0.00043
-0.00191
-0.00013
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.017 -0.015 -0.004 0.018
bz    0.000 1.000 -0.000 -0.010 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.025 -0.772
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.005
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00150
# std total in deg: 0.57774
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.83398
0.87712
0.01326
0.02218
0.02383
0.00295
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00077
-0.07458
-0.00012
```

```
0.00036
0.00062
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.008 -0.016 -0.004 0.016
bz    0.000 1.000 0.001 -0.012 -0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.039 -0.829
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.014
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.20043
# std total in deg: 84.82910
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
145.40171
77.00708
1.64218
1.22931
2.52689
0.35641
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00787
0.99395
-0.00158
0.00057
-0.03010
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.014 0.006 0.008 0.019
bz    0.000 1.000 0.006 0.009 -0.009
omega 0.000 0.000 1.000 0.012 -0.660
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 8.10192
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
7.04699
4.23295
0.01699
0.01509
0.02583
0.00372
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.02036
0.80077
0.00069
-0.00151
-0.00037
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.025 -0.012 -0.004 0.015
bz    0.000 1.000 -0.004 -0.009 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.062 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.085
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Θ. Αξιολόγηση της συνάρτησης ε_{reform}

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01974
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02702
0.02541
0.00931
```

```
0.01489
0.01616
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
-0.00001
0.00039
0.00029
-0.00074
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.001 -0.206 -0.001 0.258
bz    0.000 1.000 -0.013 -0.256 0.006
omega 0.000 0.000 1.000 0.037 -0.847
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.014
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01974
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02702
0.02541
0.00931
0.01489
0.01616
0.00207
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
-0.00001
0.00039
0.00029
-0.00074
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.001 -0.206 -0.001 0.258
bz    0.000 1.000 -0.013 -0.256 0.006
omega 0.000 0.000 1.000 0.037 -0.847
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.014
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01926
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02807
0.02584
0.00856
0.01172
0.01365
0.00187
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00003
0.00022
0.00028
-0.00037
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.257 0.000 0.333
bz    0.000 1.000 -0.014 -0.330 0.007
omega 0.000 0.000 1.000 0.030 -0.771
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01926
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
```

```
0.02807
0.02584
0.00856
0.01172
0.01365
0.00187
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00003
0.00022
0.00028
-0.00037
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.003 -0.257 0.000 0.333
bz    0.000 1.000 -0.014 -0.330 0.007
omega 0.000 0.000 1.000 0.030 -0.771
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00001
# std total in deg: 0.02241
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03571
0.02516
0.01824
0.00691
0.01055
0.00368
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00005
-0.00019
0.00132
0.00046
0.00060
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.017 -0.047 -0.030 0.079
bz    0.000 1.000 -0.007 -0.087 0.033
omega 0.000 0.000 1.000 -0.019 -0.605
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.001
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00204
# std total in deg: 0.03515
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.05606
0.03913
0.01814
0.02000
0.02766
0.00397
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00015
0.00020
-0.00021
0.00008
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.004 -0.163 0.002 0.207
bz    0.000 1.000 -0.007 -0.231 0.004
omega 0.000 0.000 1.000 0.021 -0.848
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.008
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00132
```

```
# std total in deg: 0.02126
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03573
0.02154
0.01073
0.00987
0.01748
0.00237
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00006
0.00023
0.00022
-0.00019
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.072 -0.177 0.009 0.221
bz    0.000 1.000 -0.002 -0.256 -0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.057 -0.847
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.080
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Επίδραση στοιχείων προσανατολισμού)

Α. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Υ και στην διεύθυνση Ζ

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00144
# std total in deg: 0.02011
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02312
0.02789
0.01419
0.01352
0.01800
0.00303
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00003
-0.00001
0.00002
-0.00051
0.00016
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.120 -0.058 0.270
bz    0.000 1.000 0.212 -0.290 -0.072
omega 0.000 0.000 1.000 -0.691 -0.776
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.291
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00144
# std total in deg: 0.02011
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02312
0.02789
0.01419
0.01352
0.01800
0.00303
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00003
-0.00001
```

```
0.00002
-0.00051
0.00016
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.120 -0.058 0.270
bz    0.000 1.000 0.212 -0.290 -0.072
omega 0.000 0.000 1.000 -0.691 -0.776
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.291
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00129
# std total in deg: 0.01930
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02414
0.02832
0.01179
0.01073
0.01487
0.00251
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00005
0.00008
-0.00072
0.00040
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.163 -0.081 0.343
bz    0.000 1.000 0.250 -0.368 -0.082
omega 0.000 0.000 1.000 -0.589 -0.743
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.247
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00129
# std total in deg: 0.01930
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02414
0.02832
0.01179
0.01073
0.01487
0.00251
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00005
0.00008
-0.00072
0.00040
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.163 -0.081 0.343
bz    0.000 1.000 0.250 -0.368 -0.082
omega 0.000 0.000 1.000 -0.589 -0.743
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.247
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00197
# std total in deg: 0.02011
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02313
0.02789
0.01419
0.01352
0.01800
0.00303
```

```
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00008
-0.00008
-0.00012
-0.00015
-0.00004
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.120 -0.058 0.270
bz    0.000 1.000 0.212 -0.290 -0.072
omega 0.000 0.000 1.000 -0.691 -0.776
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.291
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00210
# std total in deg: 0.03273
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.04834
0.03838
0.02074
0.01644
0.02896
0.00448
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00003
0.00015
-0.00032
-0.00057
0.00078
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.350 -0.134 -0.068 0.231
bz    0.000 1.000 0.126 -0.254 -0.012
omega 0.000 0.000 1.000 -0.388 -0.795
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.053
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00134
# std total in deg: 0.01989
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02901
0.02346
0.01277
0.00915
0.01834
0.00277
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00009
-0.00021
-0.00113
0.00054
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.161 -0.151 -0.059 0.254
bz    0.000 1.000 0.126 -0.276 -0.012
omega 0.000 0.000 1.000 -0.445 -0.824
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.206
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

B. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Y και στην διεύθυνση Z και ίσες στροφές

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00143
# std total in deg: 0.01878
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02291
```

```
0.02775
0.01238
0.01180
0.01321
0.00248
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
0.00003
0.00048
-0.00072
0.00027
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.085 -0.083 0.294
bz    0.000 1.000 0.241 -0.280 -0.005
omega 0.000 0.000 1.000 -0.727 -0.487
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00143
# std total in deg: 0.01878
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02291
0.02775
0.01238
0.01180
0.01321
0.00248
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
0.00003
0.00048
-0.00072
0.00027
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.085 -0.083 0.294
bz    0.000 1.000 0.241 -0.280 -0.005
omega 0.000 0.000 1.000 -0.727 -0.487
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00128
# std total in deg: 0.01831
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02387
0.02813
0.00996
0.00950
0.01113
0.00214
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00005
0.00044
-0.00080
0.00043
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.117 -0.117 0.359
bz    0.000 1.000 0.297 -0.352 -0.001
omega 0.000 0.000 1.000 -0.627 -0.440
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.006
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00128
# std total in deg: 0.01831
```

```
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02387
0.02813
0.00996
0.00950
0.01113
0.00214
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00005
0.00044
-0.00080
0.00043
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.117 -0.117 0.359
bz    0.000 1.000 0.297 -0.352 -0.001
omega 0.000 0.000 1.000 -0.627 -0.440
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.006
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00196
# std total in deg: 0.01878
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02291
0.02775
0.01238
0.01180
0.01321
0.00248
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00007
-0.00004
0.00031
-0.00040
0.00004
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.085 -0.083 0.294
bz    0.000 1.000 0.241 -0.280 -0.005
omega 0.000 0.000 1.000 -0.727 -0.487
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.013
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01817
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02796
0.02305
0.00980
0.00933
0.01234
0.00210
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00002
0.00018
0.00028
-0.00074
0.00041
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.351 -0.098 -0.100 0.238
bz    0.000 1.000 0.173 -0.239 0.033
omega 0.000 0.000 1.000 -0.424 -0.524
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.177
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
```

```
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01850
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02860
0.02343
0.00971
0.00840
0.01331
0.00212
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00003
0.00010
-0.00007
-0.00051
0.00048
# Correlation matrix:
           by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.236 -0.111 -0.096 0.250
bz    0.000 1.000 0.154 -0.233 0.036
omega 0.000 0.000 1.000 -0.400 -0.572
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.097
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Γ. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Y και στην διεύθυνση Z και στροφή ω

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.01816
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02260
0.02716
0.00976
0.01300
0.01164
0.00170
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00006
-0.00004
0.00032
0.00066
-0.00089
# Correlation matrix:
           by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.118 -0.059 0.297
bz    0.000 1.000 0.214 -0.285 0.073
omega 0.000 0.000 1.000 -0.694 -0.307
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.157
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.01816
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02260
0.02716
0.00976
0.01300
0.01164
0.00170
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00006
-0.00004
0.00032
0.00066
-0.00089
# Correlation matrix:
```

```
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.118 -0.059 0.297
bz    0.000 1.000 0.214 -0.285 0.073
omega 0.000 0.000 1.000 -0.694 -0.307
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.157
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.01786
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02363
0.02760
0.00812
0.01036
0.01003
0.00141
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
-0.00002
0.00077
-0.00028
-0.00069
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.160 -0.083 0.353
bz    0.000 1.000 0.254 -0.363 0.088
omega 0.000 0.000 1.000 -0.591 -0.246
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.129
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.01786
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02363
0.02760
0.00812
0.01036
0.01003
0.00141
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
-0.00002
0.00077
-0.00028
-0.00069
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.244 -0.160 -0.083 0.353
bz    0.000 1.000 0.254 -0.363 0.088
omega 0.000 0.000 1.000 -0.591 -0.246
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.129
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00192
# std total in deg: 0.01817
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02260
0.02716
0.00976
0.01300
0.01165
0.00170
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00010
-0.00011
0.00023
```

```
0.00099
-0.00117
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.237 -0.118 -0.059 0.297
bz    0.000 1.000 0.214 -0.285 0.073
omega 0.000 0.000 1.000 -0.694 -0.307
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.157
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01793
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02806
0.02288
0.00850
0.00998
0.01105
0.00147
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00010
0.00113
-0.00037
-0.00145
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.350 -0.127 -0.073 0.234
bz    0.000 1.000 0.133 -0.248 0.084
omega 0.000 0.000 1.000 -0.389 -0.404
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.231
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00118
# std total in deg: 0.01789
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02761
0.02352
0.00810
0.00919
0.01152
0.00141
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00002
0.00002
0.00064
-0.00014
-0.00089
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.295 -0.124 -0.067 0.239
bz    0.000 1.000 0.107 -0.213 0.079
omega 0.000 0.000 1.000 -0.396 -0.398
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.176
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Δ. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Y και στην διεύθυνση Z και στροφή φ

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.01822
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02249
0.02710
0.00991
0.01301
0.01227
```

```
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00005
-0.00007
-0.00012
0.00004
-0.00061
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.233 -0.116 -0.056 0.300
bz    0.000 1.000 0.211 -0.284 0.034
omega 0.000 0.000 1.000 -0.696 -0.433
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.049
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00140
# std total in deg: 0.01822
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02249
0.02710
0.00991
0.01301
0.01227
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00005
-0.00007
-0.00012
0.00004
-0.00061
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.233 -0.116 -0.056 0.300
bz    0.000 1.000 0.211 -0.284 0.034
omega 0.000 0.000 1.000 -0.696 -0.433
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.049
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.01787
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02352
0.02754
0.00822
0.01035
0.01047
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
0.00001
0.00023
-0.00051
-0.00022
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.241 -0.158 -0.081 0.364
bz    0.000 1.000 0.253 -0.364 0.046
omega 0.000 0.000 1.000 -0.593 -0.374
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.042
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00126
# std total in deg: 0.01787
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02352
0.02754
```

```
0.00822
0.01035
0.01047
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00000
0.00001
0.00023
-0.00051
-0.00022
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.241 -0.158 -0.081 0.364
bz    0.000 1.000 0.253 -0.364 0.046
omega 0.000 0.000 1.000 -0.593 -0.374
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.042
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00192
# std total in deg: 0.01822
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02249
0.02711
0.00991
0.01301
0.01228
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00010
-0.00014
-0.00021
0.00037
-0.00086
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.233 -0.116 -0.056 0.300
bz    0.000 1.000 0.211 -0.284 0.034
omega 0.000 0.000 1.000 -0.696 -0.433
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.049
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00177
# std total in deg: 0.02623
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.04054
0.03359
0.01250
0.01481
0.01699
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00014
-0.00018
-0.00053
0.00015
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.350 -0.127 -0.072 0.239
bz    0.000 1.000 0.128 -0.248 0.061
omega 0.000 0.000 1.000 -0.389 -0.510
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.166
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00130
# std total in deg: 0.01871
# std errors:
```

```
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02985
0.02320
0.00833
0.00901
0.01299
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
0.00001
0.00007
-0.00009
-0.00059
-0.00009
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.330 -0.139 -0.076 0.249
bz    0.000 1.000 0.113 -0.250 0.068
omega 0.000 0.000 1.000 -0.314 -0.535
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.169
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
```

Ε. Ίση μετατόπιση στην διεύθυνση Υ και στην διεύθυνση Ζ και στροφή κ

```
------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00139
# std total in deg: 0.01801
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02235
0.02695
0.01125
0.01163
0.01155
0.00201
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00007
-0.00006
-0.00089
0.00105
-0.00075
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.234 -0.090 -0.081 0.302
bz    0.000 1.000 0.239 -0.284 0.068
omega 0.000 0.000 1.000 -0.725 -0.231
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.213
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00139
# std total in deg: 0.01801
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02235
0.02695
0.01125
0.01163
0.01155
0.00201
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00007
-0.00006
-0.00089
0.00105
-0.00075
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.234 -0.090 -0.081 0.302
bz    0.000 1.000 0.239 -0.284 0.068
omega 0.000 0.000 1.000 -0.725 -0.231
```

```
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.213
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00125
# std total in deg: 0.01770
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02336
0.02738
0.00912
0.00937
0.00996
0.00173
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00003
0.00001
-0.00008
-0.00002
0.00003
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.240 -0.125 -0.112 0.357
bz    0.000 1.000 0.291 -0.355 0.084
omega 0.000 0.000 1.000 -0.625 -0.192
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.175
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00125
# std total in deg: 0.01770
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02336
0.02738
0.00912
0.00937
0.00996
0.00173
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00003
0.00001
-0.00008
-0.00002
0.00003
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.241 -0.125 -0.112 0.357
bz    0.000 1.000 0.291 -0.355 0.084
omega 0.000 0.000 1.000 -0.625 -0.192
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.175
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00191
# std total in deg: 0.01801
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02235
0.02695
0.01125
0.01163
0.01155
0.00201
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00011
-0.00013
-0.00104
0.00135
-0.00101
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
```

```
by    1.000 0.234 -0.090 -0.081 0.302
bz    0.000 1.000 0.240 -0.284 0.068
omega 0.000 0.000 1.000 -0.725 -0.231
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.213
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00154
# std total in deg: 0.02257
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03554
0.02842
0.01162
0.01182
0.01407
0.00244
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00004
0.00009
-0.00035
-0.00024
0.00020
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.348 -0.107 -0.096 0.238
bz    0.000 1.000 0.166 -0.243 0.082
omega 0.000 0.000 1.000 -0.418 -0.327
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.305
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01815
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02838
0.02354
0.00853
0.00866
0.01179
0.00205
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00003
0.00006
-0.00021
-0.00001
-0.00015
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.342 -0.108 -0.098 0.244
bz    0.000 1.000 0.141 -0.216 0.081
omega 0.000 0.000 1.000 -0.375 -0.323
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 -0.302
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

ΣΤ. De-rotate

```
------------------ ################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 1
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01879
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02697
0.02547
0.00647
0.01490
0.01106
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00001
```

```
0.00077
-0.00021
-0.00117
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 -0.000 0.253
bz    0.000 1.000 0.001 -0.252 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.002 -0.632
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 2
# s0 value: 0.00122
# std total in deg: 0.01879
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02697
0.02547
0.00647
0.01490
0.01106
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00001
0.00077
-0.00021
-0.00117
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 -0.000 0.253
bz    0.000 1.000 0.001 -0.252 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.002 -0.632
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 3
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01858
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02801
0.02591
0.00595
0.01177
0.00972
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00004
0.00055
-0.00045
-0.00081
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.001 -0.262 -0.000 0.309
bz    0.000 1.000 0.001 -0.325 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.452
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.002
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ #################### -------------
 ------------------ #################### -------------
# Results from coplanarity error function - error 4
# s0 value: 0.00127
# std total in deg: 0.01858
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02801
0.02591
0.00595
0.01177
0.00972
0.00000
```

```
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00004
0.00055
-0.00045
-0.00081
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.001 -0.262 -0.000 0.309
bz    0.000 1.000 0.001 -0.325 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.452
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.002
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from reformulated error function
# s0 value: 0.00147
# std total in deg: 0.01879
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.02697
0.02548
0.00647
0.01490
0.01106
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
-0.00008
0.00077
0.00017
-0.00117
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.001 -0.209 -0.000 0.253
bz    0.000 1.000 0.001 -0.252 0.001
omega 0.000 0.000 1.000 0.002 -0.632
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.000
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Gold error function
# s0 value: 0.00246
# std total in deg: 0.03959
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.06751
0.04512
0.01512
0.02330
0.02148
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00000
0.00018
0.00046
-0.00045
-0.00071
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 0.000 -0.167 -0.001 0.202
bz    0.000 1.000 0.002 -0.223 0.003
omega 0.000 0.000 1.000 0.001 -0.578
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.003
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
 ------------------ ################### -------------
# Results from Sampson error function
# s0 value: 0.00116
# std total in deg: 0.01911
# std errors:
# sby sbz sw sf sk (in deg):
0.03256
0.02215
0.00693
```

```
0.01027
0.01094
0.00000
# Differences between  true and estimated values for the unknowns (angles in deg):
-0.00001
0.00010
0.00046
-0.00020
-0.00092
# Correlation matrix:
          by    bz   omega  phi  kappa
by    1.000 -0.000 -0.165 -0.000 0.207
bz    0.000 1.000 0.001 -0.196 0.002
omega 0.000 0.000 1.000 -0.000 -0.561
phi   0.000 0.000 0.000 1.000 0.004
kappa 0.000 0.000 0.000 0.000 1.000
 ------------------ ################### -------------
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ MATLAB

```
% Initial Estimation of the Essential Matrix - Linear solution

% INPUT VARIABLES: p1-> xyz spherical coordinates of left image
%                  p2-> xyz spherical coordinates of right image (RS of
%                  right image)
% OUTPUT VARIABLES: Points_3D-> XYZ coordinates of the created points, one
% extra column at the end refers to the radius of the sphere

%Date: 2018.06.12

function [E,R1,R2,b1,b2]=Essential_linear(p1,p2)

    A(:,1:3)= [p2(:,1).*p1(:,1) p2(:,1).*p1(:,2) p2(:,1).*p1(:,3)];
    A(:,4:6)= [p2(:,2).*p1(:,1) p2(:,2).*p1(:,2) p2(:,2).*p1(:,3)];
    A(:,7:9)= [p2(:,3).*p1(:,1) p2(:,3).*p1(:,2) p2(:,3).*p1(:,3)];

    [U,D,V]=svd(A);
    Einit=reshape(V(:,9),3,3)';
    [Ua,Da,Va]=svd(Einit');
    E=Ua*diag([1  1  0])*Va';    % Enforce constraint - equal non zero
                                  singular values
    [U,D,V]=svd(E);

    if (round(det(U*V'))== -1)
        [U,D,V]=svd(-E);
    end

    W=[0 -1 0;1 0 0;0 0 1];
    R1=U*W'*V';
    R2=U*W*V';

    Z=[0 1 0;-1 0 0;0 0 0];
    b1=U*Z*U';
    b1=[b1(2,3) b1(3,1) b1(1,2)];
    b2=U*Z'*U';
    b2=[b2(2,3) b2(3,1) b2(1,2)];
end
```

```
% Investigate the recovered orientation parameters from Essential matrix
% and find the true combination of Rotation Matrix and base direction
% INPUT VARIABLES: p1-> xyz spherical coordinates of single point on left
%                  image (row vector)
%                 p2-> xyz spherical coordinates  of single point on right image
                   (RS of
%                  right image)
% OUTPUT VARIABLES:R-> True rotation matrix
%                  B-> True base
% Date: 2018.06.09

function [R,B,P1,P2,P3,P4]=RB_solution(R1,R2,b1,b2,p1,p2)

    p2_gl_1 = [R2*p2'+b1']';
    P1 = Triangulation_DLT (p1, p2_gl_1, b1);
    p2_gl_2 = [R2*p2'+b2']';
    P2 = Triangulation_DLT (p1, p2_gl_2, b2);
    p2_gl_3 = [R1*p2'+b1']';
    P3 = Triangulation_DLT (p1, p2_gl_3, b1);
    p2_gl_4 = [R1*p2'+b2']';
    P4 = Triangulation_DLT (p1, p2_gl_4, b2);

    if (p1*P1')>0 & ([p2_gl_1-b1]*[P1-b1]')>0
        disp('The correct solution is R2 and b1 - P1')
        R=R2;
        B=b1;
    elseif (p1*P2')>0 & ([p2_gl_2-b2]*[P2-b2]')>0
        disp('The correct solution is R2 and b2 - P2')
        R=R2;
        B=b2;
    elseif (p1*P3')>0 & ([p2_gl_3-b1]*[P3-b1]')>0
        disp('The correct solution is R1 and b1 - P3')
        R=R1;
        B=b1;
    elseif (p1*P4')>0 & ([p2_gl_4-b2]*[P4-b2]')>0
        disp('The correct solution is R1 and b2 - P4')
        R=R1;
        B=b2;
    end
end
```

```
% Triangulate - DLT using cross product and Linear LSQ (Hartley and
% Zisserman)
% Input variables: p_left-> xyz coordinates of left image points
%                  p_rgt-> xyz coordinates of right image points
%                  C2-> Right image center refering to global coordinate
%                  system [assuming C1(0,0,0)]

% Output: Inter_3DP -> 3D coordinates of reconstructed points

% Date: 27.05.2018

function [Inter_3DP] = Triangulation_DLT (p_left, p_rgt_gl, C2)

    for i=1:size(p_left,1)
        x1=p_left(i,1); y1=p_left(i,2); z1=p_left(i,3);
        x2=p_rgt_gl(i,1); y2=p_rgt_gl(i,2); z2=p_rgt_gl(i,3);
        Xc = C2(1); Yc=C2(2); Zc=C2(3);

        A = [0 -z1 y1;
             z1 0 -x1;
             0 Zc-z2 y2-Yc;
             z2-Zc 0 -x2+Xc];

        b=[ 0;
            0;
            y2*Zc-z2*Yc;
            z2*Xc-x2*Zc];

        x=inv(A'*A)*A'*b;

        Inter_3DP(i,:)=x';
    end
end
```